325

华南理工大学
2005年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：数学分析

适用专业：计算数学　应用数学　运筹学与控制论

一、（10分）设 $x_1 > a > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a^2}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

二、（10分）求积分 $\oint_C \dfrac{x^3dx - y^3dx}{x^4+y^4}$, 其中 C 是圆： $x^2+y^2=1$, 逆时针为正向.

三、（10分）讨论函数序列 $f_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n\sqrt{t}}$ 在 $(0,\infty)$ 上的一致收敛性.

四、（10分）设 $z = z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}) = 0$ 所确定. 证明

$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

五、（10分）设 $f(x)$ 是偶函数，在 $x=0$ 的某个邻域中有连续的二阶导数，$f(0)=1$, $f''(0)=2$, 试证明无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(f(\frac{1}{n})-1\Big)$ 绝对收敛。

六、（10分）设曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 由方程组 $\begin{cases} x+y+2t(1-t)=1 \\ te^y+2x-y=2 \end{cases}$ 确定. 求该曲线在 $t=0$ 处的切线方程和法线方程.

七、（15分）　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2+n+1)x^n$ 的收敛域, 并求该级数的和.

八、（ 15 分）求第二型曲面积分： $\iint_S x\,dydz - y\,dxdz + z\,dxdy$, S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分，其定向为下侧.

九、（ 15 分）（ 1 ）设 $a_0>0$. 证明积分 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ 关于 $|a|\geqslant a_0$ 一致收敛；

（ 2 ） $a>0$. 计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ 和 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

十、（ 15 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上二阶连续可微， $|f(x)|\leqslant A$, $|f''(x)|\leqslant B$. 试证明 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}$.

十一、（ 15 分）设 $f(x)\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续， $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛. 试证明 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$.

十二、（ 15 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上二阶连续可微， $f(0)=f(\pi)=0$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,2,\ldots$$

试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2$ 收敛.