

一、求解如下微分方程： (20 分)

$$(1) (x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0$$

$$(2) (ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0$$

二、求微分方程

$$y'' - 6y' + 9y = xe^x \cos x$$

的通解。 (15 分)

三、求如下的微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

满足初值条件：  $x(0) = y(0) = z(0) = 1$  的解。 (20 分)

四、已知方程：

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

有一个特解  $y_1 = x$ ，求其通解。 (20 分)

五、已测得某场地长  $l$  的值为  $l^* = 110$  m，宽  $d$  的值为  $d^* = 80$  m，已知  $|l - l^*| \leq 0.2$  m， $|d - d^*| \leq 0.1$  m，试求面积  $S = ld$  的绝对误差限与相对误差限。

(15 分)

六、已知一组实验数据如下，用一般最小二乘法求它的拟合曲线。

$x_i$	1	2	3	4	5
-------	---	---	---	---	---

$f_i$	4	4.5	6	8	8.5
$w_i$	2	1	3	1	1

(20 分)

七、已知方程：

$$x^3 - x^2 - 0.8 = 0$$

在  $x = 1.5$  附近有一个根，将此方程改写成如下两个等价形式： $x = \sqrt[3]{0.8 + x^2}$ ，

$x = \sqrt{x^3 - 0.8}$ ，构造两个相应的迭代格式：

$$(1) x_{k+1} = \sqrt[3]{0.8 + x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) x_{k+1} = \sqrt{x_k^3 - 0.8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

试分别讨论上述两个迭代格式的收敛性，并对收敛的格式求所给方程的近似根  $x^*$ （精确到 3 位有效数）。

(20 分)

八、给定线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

(1) 用列主元素消去法求解所给线性方程组；

(2) 写出 Gauss-Seidel（高斯-塞德尔）迭代格式；

(3) 分析该迭代格式的收敛性。

(20 分)