

(本试卷共六题, 每题 25 分)

1. 质量为 m 的粒子在势场 $V(\mathbf{r})$ 中运动.

(a) 写出粒子在任一状态 $\psi(\mathbf{r})$ 下的能量密度 W 的表达式, 并证明粒子能量的平均值为 $E = \int W d^3\mathbf{r}$.

(b) 写出粒子能流密度 \mathbf{S} 的表达式, 并证明能量守恒公式 $\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$

2. 一维运动的粒子处于半壁无限高势场中, 即 $V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$,

求粒子的束缚态本征函数, 并用图解法表示出本征能量.

3. 设 \mathbf{p} 和 \mathbf{l} 分别是粒子的动量和角动量算符, 证明

(a) $\mathbf{p} \times \mathbf{l} + \mathbf{l} \times \mathbf{p} = 2i\hbar \mathbf{p}$,

(b) $i\hbar(\mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mathbf{l} \times \mathbf{p}) = [\mathbf{l}^2, \mathbf{p}]$.

4. 考虑由两个全同粒子组成的体系, 每个粒子可处于三个单粒子态 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 之一. 在下列情况下体系可能的状态有哪些?

(a) 粒子为 Bose 子, (b) 粒子为 Fermi 子, (c) 粒子为经典粒子.

5. 对于电子自旋,

(a) 写出 σ_z 表象中的泡利矩阵.

(b) 在 σ_z 表象中求 σ_x 的本征值.

(c) 求 σ_z 表象到 σ_x 表象的变换矩阵.

6. 一维无限深方势阱中的粒子受到微扰作用

$$H'(x) = \begin{cases} 2\lambda x/a & (0 < x < a/2) \\ 2\lambda(1-x/a) & (a/2 < x < a) \end{cases},$$

其中势阱范围是 $0 < x < a$, 求基态能量的一级修正。