

华南理工大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(试卷上做答无效, 请在答题纸上做答, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 高等代数

适用专业: 基础数学 计算数学 概率论与数理统计 应用数学

共 页

一、 假设 P 为任意给定的一个数域而 C 为复数域, $f(x)$ 为 P 上的次数大于 0 的多项式。证明如果 $f(x)$ 在 P 上没有重因式, 那么 $f(x)$ 在 C 上没有重根。
(10 分)

二、 将复数域 C 看成为实数域 R 上的线性空间。对于 $\alpha, \beta \in C$, 定义 $f(\alpha, \beta) = \alpha \overline{\beta} + \overline{\alpha} \beta$ 。问 f 是否是一个内积, 为什么? (10 分)

三、 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 4 & 17 \\ -1 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $f(X) = XAX'$ 。问 $f(X)$ 是否是一个正定二次型, 为什么? (10 分)

四、 设线性方程组

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

的解空间为 W 。求向量 $(2, 3, 4, 5)$ 在 W 上的内射影以及到 W 的距离。(15 分)

五、 设 $P[x]$ 为数域 P 上的多项式环, D 为 $P[x]$ 上的微分变换, 即 $D(f(x)) = f'(x)$ 。(i) 求 D 的所有的不变子空间; (ii) 证明 D 在其所有的有限维的不变子空间上都不能对角化。(20 分)

六、 设 n 阶矩阵 A 对于任意的 n 维列向量 X 满足 $X'AX = 0$ 。(i) 证明当 A 为对称矩阵时 $A = 0$; (ii) 如果矩阵 A 不是对称的, A 未必是零矩阵。(15 分)

七、 设 U 为正交矩阵, $f(x) = x^2 + 2$ 。证明 (1) U 的特征根的模为 1; (2) $f(U)$ 可逆。(15 分)

八、 设 σ 为数域 P 上的 n 维向量空间 V 上的一个线性变换, $f(x)$ 为 P 上的多项式, σ 的最小多项式为 $m(x)$, 则 $f(\sigma)$ 可逆 $\Leftrightarrow m(x), f(x)$ 互素。

(20 分)

九、 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 $2n+1$ 阶实对称矩阵, 试求正交矩阵 P ,

使得 $P^{-1}AP = D$ 为对角形矩阵, 并求 D 。

(20 分)

十、 证明 (1) n 阶实反对称矩阵的特征根为纯虚数或者为零; (2) n 阶实反对称矩阵的行列式大于等于零。(15 分)