（本试卷共六题，每题 25 分）

Useful formulas:

$$\int x^n e^{ax}dx = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx \quad (n>0)$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a>0)$$

一．试确定当粒子的能量为 $0<E<V_0$ 时处于两个耦合势阱

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<-a-b \\ 0, & -a-b<x<-b \quad (\text{区域}I) \\ V_0, & -b<x<b \quad (\text{区域}II) \\ 0, & b<x<a+b \quad (\text{区域}III) \\ \infty, & a+b<x\end{cases}$$

中的能级。试与孤立势阱 ($b=\infty$) 比较，证明在耦合势阱 (b 为有限) 情况下，每个能级应该分裂为两个子能级。

二．证明：

(a) 处于势场 V(**r**) 中粒子的轨道角动量 **L** 的期望值的变化率等于力矩的期望值：$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L}\rangle = \langle \mathbf{N}\rangle$，where $\mathbf{N}=\mathbf{r}\times(-\nabla V)$ 。

(b) 对于球对称势有 $\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L}\rangle = 0$ 。

三．一个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子处于态 $\chi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

(a) 如果测量 S_z 和 S_x，问得到值为 $+\frac{\hbar}{2}$ 和 $-\frac{\hbar}{2}$ 的几率?

(b) 求 S_z 和 S_x 的期望值。

四．体系的哈密顿量为 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\hbar\omega(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)^4$ （对所有x）。

取试探波函数 $\psi_t(x,b)=\frac{1}{\pi^{1/4}}(\frac{mb}{\hbar})^{1/4}\exp(-\frac{mbx^2}{2\hbar})$，试估计体系的基态能量 ($b$ 为变分参数)。

五．设粒子被束缚在一个两维方盒子中。方盒的边长为 L，并沿 x, y 轴，其中一个顶点处于原点 o.

(a) 求本征值和本征函数。

(b) 如果引入一个小的扰动 $V(x,y)=L^2V_1\delta(x-\frac{L}{4})\delta(y-\frac{L}{4})$，求基态能级的变化(一级近似)。

六．粒子入射在一个球对称势$V(r)=\frac{\beta}{r}\exp(-\gamma r)$上，$\beta$ 和 γ 为常数.

(a) 求微分散射截面。

(b) 证明当能量为 E 的α-粒子朝原子序数为 Z 的原子核上入射时，从 (a)中所得结果可以得到 Rutherford 散射公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega}=\{\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0E\sin^2(\theta/2)}\}^2$。