

# 中山大学

## 二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 329

科目名称: 一元微积分

考试时间: 1 月 23 日 上午

### 考生须知

全部答案一律写在答题纸上,  
答在试题纸上的不得分! 请用  
蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。  
答题要写清题号, 不必抄题。

### 一. 填空题 (每小题 5 分, 共 50 分):

1. 若  $f(x)$  为定义在全体实数集  $\mathbb{R}$  上的偶函数,  $a$  为常数, 则函数  $(f(x) + a)x$  为  $\mathbb{R}$  上的 \_\_\_\_\_ 函数.

2. 设函数  $f(x) = 1 + \sin \frac{1}{x^2}, x \in [\sqrt{\frac{2}{\pi}}, +\infty)$ , 则  $f(x)$  的反函数的定义域为 \_\_\_\_\_.

3. 设  $a, b$  均为常数,  $\{x_n\}$  为一数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . 若对任意自然数  $n$ , 都有  $|a - b| \leq |x_n|$ , 则  $a$  \_\_\_\_\_  $b$ .

4. 设  $c$  为一个无理数常数, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(1+c)(2+c)} + \frac{1}{(2+c)(3+c)} + \cdots + \frac{1}{(n+c)(n+1+c)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \sin \frac{1}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 已知极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax \right)$  存在且有限, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ A + 2, & x = 1 \end{cases}$  在  $x = 1$  处连续, 则  $A = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 函数  $y = \ln(1 + \sin^2 x)$  的导数  $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 已知数集  $E = \{(-1)^n \frac{1}{3^n} : n = 1, 2, \cdots\}$ , 则  $\sup E = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 定积分  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

## 二. 单选题 (每小题 5 分, 共 20 分):

1. 若  $f'(a)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} = ( \quad )$   
A. 0;      B.  $\infty$ ;      C.  $f'(a)$ ;      D.  $2af(a) - a^2 f'(a)$ .
2. 极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  的下述几种定义中, 错误的是 (      )  
A.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - a| \leq \delta, \text{ 有 } |f(x) - b| \leq \varepsilon$ ;  
B.  $\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists \delta_n > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_n, \text{ 有 } |f(x) - b| < \frac{1}{n}$ ;  
C. 有无限多个  $\varepsilon > 0$ , 对每个  $\varepsilon$ ,  $\exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta, \text{ 有 } |f(x) - b| < \varepsilon$ ;  
D.  $\forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < 1, \exists \delta: 1 > \delta > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta, \text{ 有 } |f(x) - b| < \varepsilon$ .
3. 下述几个表达式中, 错误的是 (      )  
A.  $(\int_a^b f(x) dx)' = 0, a, b \text{ 均为常数};$       B.  $\frac{d(\int_a^x f(t) dt + c)}{dx} = f(x);$   
C.  $\int f'(x) dx = f(x) + C;$       D.  $(\int (f(x) + C) dx)' = f(x).$
4. 以下各结论中, 正确的是 (      )  
A. 若函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  连续, 则  $f(x)$  一定在  $(a, b)$  一致连续;  
B. 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  有界, 则  $f(x)$  一定在  $[a, b]$  可积;  
C. 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 且  $f(a) < f(b)$ , 则  $\exists c \in (a, b)$ , 使  $f(c) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ ;  
D. 若函数  $f(x)$  在点  $a$  连续, 则  $f(x)$  在  $a$  可导.

## 三. 计算题 (每小题 10 分, 共 50 分):

1. 设函数  $f(x)$  在  $a$  连续, 且  $f(a) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 而函数  $[f(x)]^3$  在  $a$  的导数为  $A$ , 求  $f'(a)$ .
2. 求不定积分  $\int x \arctan \sqrt{x} dx$ .
3. 讨论函数  $f(x) = (x+1)^4 (x-2)^3$  的严格单调区间与极值.
4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{x})^{2x^2}$  的值.
5. 求定积分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$  的值.

(接背面第四题)

四. 证明题 (每小题 15 分, 共 30 分):

1. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  存在二阶导数, 且  $f(x)$  不在端点  $a, b$  取得最值. 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f''(\xi) > 0$ .

2. 证明: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续、非负, 且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x) \equiv 0$ .