中 山 大 学

二00八年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：636

科目名称：数学分析

考试时间：1 月 20 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、（每小题6分，共48分）

（1）求 $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$；

（2）求 $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$；

（3）求 $\int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}$；

（4）求 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$；

（5）方程 $z=f(x,xy)+\varphi(y+z)$ 确定函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz；

（6）求曲线 $y^2=x^2(4-x)$ 所围图形的面积；

（7）计算二重积分 $\iint_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$。

（8）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，其中 $u_n=\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$，$n=1,2,\cdots$

二、（16分）求函数 $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$ 的导函数，以及函数 $f(x)$ 的极值。

三、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，记 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|$。

求证：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{4}M\text{。}$$

四、（18分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{(xy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明

1）$f(x,y)$ 在原点处连续；

2）$f(x,y)$ 在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 存在；

3）$f(x,y)$ 在原点不可微。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

五、(16分)求曲面$z=xy-1$上与原点最近的点的坐标。

六、(16分)设$\vec{F}=\dfrac{y\vec{i}-x\vec{j}}{x^2+y^2}$，曲线$L$由圆$x^2+y^2=1$和椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$组成，方向均为逆时针方向，求$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}$。

七、(16分)求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$的和函数，并讨论在$x\in(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性。

八、(10分)研究级数

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$$

的敛散性。