

二、高等代数 (9 小题共 150 分)

1. (15 分) 求方程 $2x^4 - x^3 + 2x - 3 = 0$ 的有理根.

2. (15 分) 求矩阵 X , 使 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (15 分) 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_n - 1 & a_n - 2 & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}.$$

4. (15 分) 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$, 有非零解?

5. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \mathbf{O} \\ 4 & -3 & 2 \\ \mathbf{O} & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $|A^8|$.

6. (15 分) 证明 n 元齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

7. (20 分) 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

8. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\varphi(A) = A^{10} - 5A^9$.

9. (20 分) 证明 n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.