中 山 大 学

二00九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 361

科目名称： 高等数学(A)

考试时间： 1 月 11 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为150分。

一， 完成下列各题：（每小题7分，共28分。）

1，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]$。

2，设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 给出，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

3，求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2009}x}{\sin^{2009}x+\cos^{2009}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2009}x}{\sin^{2009}x+\cos^{2009}x}dx$，并求此积分。

4，给定函数序列 $f_n(x)=nx(1-x)^n$，其中 n 为自然数，求 $f_n(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$。

二，完成下列各题：（每小题8分，共32分。）

1，设二阶方阵 A 满足条件：$A^2-3A+2E=0$，其中 E 为二阶单位矩阵，求证：矩阵 A 可以化为对角矩阵。

2，设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可导且满足

$f(1)=2\int_0^{1/2}xf(x)dx$， 求证：存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ 。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

3，求解一阶常微分方程的初值问题：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=2(\ln x)y^2, & x>0,\\ y(1)=1。\end{cases}$

4，计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z dv$，其中 Ω 由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 和 $x^2+y^2+z^2=4z$ 围成。

三，（每小题 9 分，共 18 分。）

1， 研究数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\dfrac{n+1}{n}$ 是绝对收敛还是条件收敛，并给出相应的证明。

2， 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛半径，收敛域及和函数。

四，（12 分）求二阶常微分方程：$y''+4y'+4y=1+e^{-2x}$ 的通解。

五，（12 分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且恒正，定义函数序列

$$F_n(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^{\frac{1}{n^2}}\frac{dt}{f(t)},\qquad x\in(0,+\infty)$$，其中 n 为自然数，求证：

（1） $F_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_n；

（2） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+x_n)$ 收敛；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)=+\infty$。

六，（12 分）设 A 为三阶方阵， ξ_1,ξ_2,ξ_3 均为 3 维非零列向量，满足 $A\xi_k=k\xi_k$，$(k=1,2,3)$，令 $\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3$， 求证：向量 $\xi,A\xi,A^2\xi$ 线性无关。

七，（12 分）研究线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases},$$

求参数 λ 的值使得：（1）方程组存在唯一解；（2）方程组无解；（3）方程组存在无穷多解 。

八，（12 分）计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中曲线 L 的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$，逆时针方向。

九，（12 分）计算曲面积分 $I=\iint_{S^+}(x^3z+x)dydz+(\cos y-x^2yz)dzdx-x^2z^2dxdy$，其中 S^+ 是曲面 $z=2-x^2-y^2$，$1\le z\le 2$，取上侧。