中　山　大　学

二〇一〇年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：　360

科目名称：　高等数学（A）

考试时间：　1　月　10　日　上　午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一. 完成下列各题:(每小题 7 分, 共 28 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}$

2. 记 $y-x=\cos(x+y)+1$ 确定的隐函数为 $y(x)$，求一二阶导数 $y'(x)$，$y''(x)$

3. 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 到平面 $2x+2y+z+4=0$ 的最短距离

4. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，$F(t)=\int_1^{2t}dy\int_y^{2t}f(x)dx$，求 $F'(2)$

二. 完成下列各题:(每小题 8 分, 共 32 分)

1. 设数列 a_n，b_n 满足 $a_{n+1}=2a_n-b_n$，$b_{n+1}=a_n$ $(n\ge 1)$；$a_1=1$，$b_1=-1$，求 a_n

2. 计算曲线积分 $I=\int_L yds$，L 为摆线 $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$t\in[0,2\pi]$

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S\dfrac{zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 S 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧

4. 求常微分方程的 $(ye^x-\cos x)dx+e^xdy=0$ 通解

三. (每小题 9 分, 共 18 分)

1. 将函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{4-x}$ 在 $x=2$ 点处展开成幂级数，并求 $f^{(n)}(2)$

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 且 $\forall n\in N$，$u_n\ge u_{n+1}\ge 0$，证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=0$

四. (11 分) 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

1. 求 $f'(x)$
2. 令 $g(x)=x+2f(x)$，证明：$g'(0)>0$，但在 0 的附近 $g(x)$ 不是单调函数

五. (11 分) 设 $x_1>0$；$\forall n\in N$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$；证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求此极限

六. (12 分) 求方程 $y''+4y=8x^2+4\cos(2x)$ 的通解

七. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 2 阶连续导数：$f(0)=f(1)=0$；$\forall x\in(0,1)$，$f(x)>0$；$M=f(c)$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最大值：

1. $\forall a,b\in[0,1]$，$a<b$，证明：$\int_a^b\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq\dfrac{1}{M}|f'(b)-f'(a)|$
2. 证明：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4$

八. (13 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=3 \\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=7 \\ -3x_1-4x_2+px_3+9x_4=-7 \\ x_1+x_2-4x_3-4x_4=t \end{cases}$$

1. p,t 取何值时，方程无解
2. p,t 取何值时，方程有解，求出通解

九. (13 分) 设 A,B 为 n 阶方阵

1. 设 $A^3=B^3$，$A^2B=B^2A$，且 A^2+B^2 可逆，证明：$A=B$
2. 设 $A+B$ 可逆，证明：$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$