中 山 大 学

二〇一一年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 602

科目名称： 高等数学（A）

考试时间： 1 月 16 日 上 午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为150分。

一， 完成下列各题：（每小题7分，共28分。）

1，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

2，设非零函数 $f(x)$ 在 R 上连续，满足：$f^2(x)=\int_0^x f(t)\dfrac{\sin t}{2+\cos t}dt$，

求函数 $f(x)$。

3，计算累次积分：$I=\int_0^1 dy\int_y^1 \sin x^2 dx$。

4， 若隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+y^3-xy=0$ 确定，求其在区间 $(0,+\infty)$ 上的极值，并证明是极大值还是极小值。

二，完成下列各题：（每小题8分，共32分。）

1，若 $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\2&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$， 求 A^{-1}。

2，若 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x^2+xye^{x^2+y^2}\right)dxdy$。

3，求解一阶常微分方程：$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x}+xy^2=0$ 。

4，设函数 $f(x)$ 在 R 上一阶连续可微且有界，满足：$|f(x)+f'(x)|\le 1$ 。求证： 在 R 上有 $|f(x)|\le 1$ 。

三，（每小题9分，共18分。）

1，求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径，收敛区间和收敛域，并求其

和函数。

2，把函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{4-x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数，并求其收敛域。

四，（12 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S^+} xdydz+ydzdx+zdxdy$ ，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$， $0\le z\le 4$ ，取外侧。

五，（12 分）若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+x}$ ，求证：（1）函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的导函数；（2）广义积分 $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

六，（12 分）若 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是实数，求证如下线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ -x_1+x_5=a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是： $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$。

七，（12 分）已知三阶矩阵 A 和三维向量 X，使得向量 X, AX, A^2X 线性无关，且满足 $A^3X=3AX-2A^2X$，

（1）记 $P=\begin{pmatrix}X & AX & A^2X\end{pmatrix}$，求三阶矩阵 B，使得 $A=PBP^{-1}$；

（2）计算行列式 $|A+E|$，其中 E 是三阶单位矩阵。

八，（12 分）给定序列 $u_1=2$ ， $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)$ ，求证：（1）序列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ 存在； （2）数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ 收敛。

九，（12 分）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=\dfrac{3}{4}$，$f'(0)=\dfrac{5}{4}$，若曲线积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[xe^x-6f(x)]\sin ydx+[f'(x)-5f(x)]\cos ydy$ 与路径无关， （1）求函数 $f(x)$； （2）求曲线积分 I 的值。