# 中 山 大 学

## 二〇一二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码： 602

科目名称： 高等数学(A)

考试时间： 1月 8日上 午

**考 生 须 知**

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

一、完成下列各题：（每小题 7 分，共 28 分。）

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$。

2、求解一阶常微分方程： $\dfrac{dy}{dx}=(8x+2y+1)^2$ 。

3、计算累次积分：$I=\int_0^1 dy\int_{y^{1/3}}^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$。

4、求函数 $y=2x^3-9x^2+12x+2$ 在 $[0,2]$ 的最大值和最小值。

二、完成下列各题：（每小题 8 分，共 32 分。）

1、若 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$， 求 $A^{-1}$。

2、求曲面积分 $I=\iint\limits_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中 $S$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所围立体的全表面之外侧。

3、求方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=e^{2x}$ 的通解。

4、设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 $a,b,c,d$ 为常数，且 $a\neq 0$。
证明：$f(x)$ 有三个实根的必要条件是 $b^2-3ac>0$。

三、（每小题 9 分，共 18 分。）

1、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$ 的收敛半径和收敛域，并求其和函数。

2、把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+9}$ 展开成 $(x+2)$ 的幂级数，并求其收敛域。

四、（12 分）计算曲线积分 $I=\int_C xy^2dy-x^2ydx$，其中 C 沿逆时针方向绕圆 $x^2+y^2=4$ 一圈。

五、（12 分）设 $\{a_n\}$ 是单调上升的正值序列。

（1） 求证：$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^2}$ 收敛；

（2）求证：$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界。

六、（12 分）计算 $k$ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+kx_3=3 \\ x_1+kx_2+3x_3=2 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有穷多解？当有解时，求出其所有解。

七、（12 分）若 $A$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，$X$ 为 $n$ 维实向量。
证明：二次型 $f(X)=X^TAX$ 在 $|X|=1$ 时的最大值为 $A$ 的最大特征值。
注：$|X|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 为向量 $X$ 的 $n$ 个元素。

八、（12 分）问曲线积分 $\int_L \dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 在指定平面区域 $D$ 上是否与路径无关？并说明原因。

（1）$D$: $y>0$；  （2）$D: x^2+y^2>0$。

九、（12 分）设 $\{a_n\}$ 是 $(0,1)$ 内的一个数列（即 $0<a_n<1$, 对任意的 $n=1,2\cdots$），且当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$。试讨论函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-a_n)}{2^n}$$

在 $(0,1)$ 中的连续性，其中 $\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases} 1 & \text{当} t>0; \\ 0 & \text{当} t=0; \\ -1 & \text{当} t<0. \end{cases}$