

2010 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码：数学 360 适用专业：环境科学

考生注意事项：①所有答案必须做在答题纸上，做在试题纸上一律无效；
②按试题顺序答题，在答题纸上标明题目序号。

一、填空题(每小题 4 分,共 24 分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}} \right) = 1, (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

2. 设 $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} dx =$ _____.

3. 椭圆 $x^2 + 2y^2 = 3$ 在点 $M_0(-1, 1)$ 处的法线方程为 _____.

4. 当 $x > 0$ 时, 微分方程 $x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ 的通解是 _____.

5. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

6. 设 $\alpha_1 = (2, 3, 4, 5), \alpha_2 = (3, 4, 5, 6), \alpha_3 = (4, 5, 6, 7), \alpha_4 = (5, 6, 7, 8)$, 则该向量组的秩为 _____.

二、选择题(每小题 4 分,共 40 分)

7. 函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 在 $(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 内的全部可去间断点是 ()

(A) $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$; (B) $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$;

(C) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; (D) $-\pi, 0, \pi$.

8. 已知直线 $y = 3x + b$ 是曲线 $y = x^2 + 5x + 4$ 的一条切线, 则 $b =$ ()

(A) 0; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

9. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim_{x \rightarrow 0} f''(x)=2$, 则 ()

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值; (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;
(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值; (D) $f(0)$ 不一定是 $f(x)$ 的极值。

10. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中与 x^2 是同阶无穷小的是 ()

- (A) $\ln(1+\sin x)$; (B) x^3+x^2 ; (C) x^2+x ; (D) $x-\sin x$ 。

11. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x$, 则 $\int xf(x)dx =$ ()

- (A) $x \sin x + \cos x + C$; (B) $x \sin x - \cos x + C$;
(C) $x \cos x + \sin x + C$; (D) $x \cos x - \sin x + C$ 。

12. 设连续函数 $f(x)$ 以 T 为周期, 则以下结论错误的是 ()

- (A) $\int_0^x f(t)dt$ 也以 T 为周期;
(B) $\int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)dt=0$;
(C) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$;
(D) 以上结论都不对。

13. 设 C_i 是任意常数, 以下哪个函数可以作为某二阶微分方程的通解?
()

- (A) $y = C_3x^2 + C_2x + C_1$; (B) $y = x^2 + 2x + C_1$;
(C) $y = C_1x^2 + C_1x + C_1$; (D) $y = x^2 + C_2x + C_1$ 。

14. 设 $E_i = \iint_{D_i} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D_1 = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq R^2\}$,

$D_2 = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 2R^2\}$, $D_3 = \{(x,y) | |x| \leq R, |y| \leq R\}$, 则有 ()

- (A) $E_1 < E_2 < E_3$; (B) $E_2 < E_3 < E_1$;
(C) $E_1 < E_3 < E_2$; (D) $E_3 < E_2 < E_1$ 。

15. 如果 n 阶方阵 A 与 B 等价, 则必有 ()

(A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$; (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$;

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$; (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$ 。

16. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 则 ()

(A) 向量组中任意 $r-1$ 个向量均线性无关;

(B) 向量组中任意 r 个向量均线性无关;

(C) 向量组中任意 $r+1$ 个向量均线性相关;

(D) 向量组中向量的个数必大于 r 。

三 解答题(18, 22, 23 每小题 12 分, 其它每小题 10 分, 共 86 分)

17. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x^2 \cos x - 1}{\tan x^2}$ (10 分)。

18. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$,

证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。(12 分)。

19. 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$ (10 分)。

20. 设 $z = \ln(1+x^2+y)$, 求全微分 dz (10 分)。

21. 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = x^4$ 及 $y = x$ 所围成的平面区域 (10 分)。

22. 设函数 $f(x)$ 连续, 且有 $f(x) = \cos 2x + \int_0^x f(t) \sin t dt$, 求 $f(x)$ 的表达式。(12 分)。

23. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵。

(1) 证明 B 为可逆矩阵, 并求 B^{-1} ;

(2) 设 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B (12 分)。

24. 设有方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + ax_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+a)x_2 + (4+a)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

求它的通解 (10 分)。