

2011 年湖南农业大学硕士招生自命题科目试题

科目名称及代码: 数学分析 614

适 用 专 业: 生物数学

考生注意事项: ①所有答案必须做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效。

②按试题顺序答题, 在答题纸上标明题目序号。

一、计算题 (共计 24 分, 每小题 8 分):

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$;

(2) 求 $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$;

(3) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z = f(xyz, x + y + z)$ 所确定的可微隐函数, 试求 dz 。

二、利用定积分的定义求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right)$ (6 分)。

三、设 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 可微, $f'(x)$ 单调下降, $f(0) = 0$, 证明: 对 $0 \leq a \leq b \leq a + b \leq c$ 有 $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ (15 分)。

四、将函数 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x = 0$ 展成 Taylor 级数 (15 分)。

五、设 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数部分, 计算 $\iint_{x^2 \leq y < 2} \sqrt{y - x^2} dx dy$ (15 分)。

六、计算第二型曲面积分 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 夹于 $z = 0$ 与 $z = 1$ 之间的部分, 积分沿曲面的下侧 (15 分)。

七、计算积分 $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) dx, (a > 0)$ (15 分)。

八、试求指数 λ ，使得 $\frac{x}{y}r^\lambda dx - \frac{x^2}{y^2}r^\lambda dy$ ，（其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ）为某个函数 $u(x, y)$ 的全

微分，并求 $u(x, y)$ （15 分）。

九、计算 $\int_L x^2 ds$ ，其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线（15 分）。

十、已知 $a_n > 0$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散，求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1}$ 也发散。（15 分）