湘潭大学2007年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：基础数学、应用数学、计算数学、运筹学与控制论、概率论与数理统计

注意：所有答题一律写在答题纸上，否则无效。

1、(1) 什么是数域P上的不可约多项式？　　(5分)

(2) 设 $f(x),p(x)$ 是数域 P 上的多项式，并且 $p(x)$ 是不可约多项式，证明或者 $p(x)\mid f(x)$，或者 $(p(x),f(x))=1$.　　(5分)

(3) 设 $p(x)$ 是数域P上的不可约多项式，证明对数域P上的任两个多项式 $f(x),g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$.　　(5分)

(4) 设 $p(x)$ 是数域P上的不可约多项式，证明 $p(x)$ 无重根.　　(5分)

2、计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$　　(10分).

3、已知齐次线性方程组 $\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$

其中 $a_1+a_2+\cdots+a_n\neq 0$. 讨论当 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 取什么值时，

（1）　方程组只有零解；

（2）　方程组有非零解并求出一个基础解系. (15分)

4、设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果 $AB=0$，那么秩(A)+秩$(B)\leq n$. (15分)

5、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交线性替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为标准型 $y_1^2+4y_2^2$. 求 a, b 及正交矩阵 T.　　(15 分)

6、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 a,b 的值;

（2）求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=B$.　　(15 分)

7、设 V 是由定义在实数域上的实函数构成的线性空间，令

$$W_1=\{f(x)\mid f(x)\in V, f(-x)=f(x)\},\ W_2=\{f(x)\mid f(x)\in V, f(-x)=-f(x)\}.$$

证明：W_1、W_2 皆为 V 的子空间，且 $V=W_1\oplus W_2$.　　(15 分)

8、设 n 阶矩阵 A 的元素均为 1。

（1）求它的不变因子、初等因子、行列式因子、特征多项式、最小多项式;

（2）证明它与对角矩阵相似，并求可逆阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。　　(15 分)

9、（1）证明反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数;

（2）设 A、B 是实对称矩阵，证明 AB-BA 的特征值的实部为 0。　　(15 分)

10、设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，σ 是 V 的一个线性变换，且 $(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n))=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，其中 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$。设 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, $1\le k\le n$。证明:

（1）列向量组 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ 线性相关当且仅当向量组 $\sigma(\alpha_{i_1}),\sigma(\alpha_{i_2}),\cdots,\sigma(\alpha_{i_k})$ 线性相关;

（2） σV 的维数=A 的秩。　　(15 分)