湘潭大学 2007 年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、概率统计

注意：所有答题一律写在答题纸上，否则无效。

一、（14 分）求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值。

二、求下列极限（每小题 10 分，共 20 分）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

三、求下列积分（每小题 10 分，共 20 分）

(1) $\int\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}dx$；

(2) $\int_0^1 x\,|x-a|\,dx$.

四 、（12 分）设 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$, n=1,2,⋯.证明：

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

五 、（12 分）设 $f(t)$ 在区间 $[1,2]$ 上可积，D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ 所围成的区域在第一象限中的部分. 证明：$\iint\limits_D f(\sqrt{xy})d\sigma=\ln 2\int_1^2 f(\sqrt{t})dt$.

六、（12 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛域及和函数。

七、（12 分）求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在约束条件：$x^2+y^2+z^2=1$ 下的条件极

值。

八、(12 分) 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dxdydz$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2=4z$ 和 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的区域。

九、(12 分) 计算曲线积分 $I=\int_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 L 为单位圆周：$x^2+y^2=1$，取逆时针方向。

十、(12 分) 设正值函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，证明：

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 具有相同的敛散性。

十一、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0, f(x)>0$，

当 $x\in(a,b]$. 求证：不存在常数 $M>0$，使得 $0\le f'(x)\le Mf(x)$，当 $x\in(a,b]$.

6