湘潭大学2008年硕士研究生入学考试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹与控制

注意：所有答题一律写在答题纸上，否则无效

一、求下列极限（每小题10分，共20分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

二、叙述题（每小题5分，共10分）

1、表述数列$\{x_n\}$的柯西（Cauchy）收敛原理

2、表述闭区间套定理

三、（10分）证明：当$x>-1$时，不等式$\ln(1+x)\le x$成立。

四、求下列积分（每小题10分，共20分）

1、$\int e^x\cos 2x dx$；

2、$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

五、（10分）确定函数$f(x,y)=4x+xy^2+y^2$在圆域$x^2+y^2\le 1$上的最大值和最小值。

六、（10分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的收敛域及和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$的和。

七、（10分）计算曲线积分$I=\int_L(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是圆周

$x^2+y^2=2x$的上半部分，方向从点$(0,0)$到点$(2,0)$.

八、（10分）计算积分

$$I=\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+5}}dxdy,\text{其中}D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}.$$

九、（10 分）讨论正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n n!}{n^n}$ （$p\in R^+$）的敛散性

十 、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=0$ ， 试求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$

其中积分区域 $\Omega_t : x^2+y^2+z^2 \le t^2$.

十一、（10 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

$|x_{n+1}-x_n| \le \alpha |x_n - x_{n-1}|$, $0<\alpha<1$, $n=2,3,\cdots$.

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

十二 、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$. 证明： $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

十三、（10 分）证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$ 关于 y 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛。