国防科技大学研究生院2002年硕士生入学考试

428- 离散数学　　试题　题单号：40628

（可不抄题）

考生注意：1、答案必须写在统一配发的答题纸上；

2、统考生做第一、二、三、四、五、六、七、八、九题；

3、单独考生做第一、二、三、四、五、六、七、十、十一题。

一、（每小题6分，共12分）

设集合A={1，2，3，4}上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下：

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

i)试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质（即是否具有自反性，反自反性，对称性，反对称性和传递性这五种性质）。

ii) $R_1\circ R_2, t(R_1)$ 和 $tsr(R_2)$.

二、（8分）

求合式公式 $(P\to(Q\wedge R))\wedge(\neg P\to(\neg Q\wedge\neg R))$ 的主合取范式和主析取范式。

三、（10分）

设二元关系 $R\subseteq A^2$ 是自反的。证明R为等价关系的充要条件是：

若〈a,b〉,〈a,c〉$\in$ R, 则$<b,c>\in$ R.

四、(每小题 5 分，共 15 分)

在 1 到 2000 这 2000 个正整数中，试求出：

I) 能被 3、5 或 7 整除的正整数的个数；

II) 仅能被 3、5 或 7 这三数中的两者整除的正整数的个数；

III) 能被 3 整除，但不能被 5 整除，也不能被 7 整除的正整数的个数。

五、(10 分)

设 A，B 为非空集合且 $A\cap B=\varnothing$. 证明：存在函数 $h:A\to A\cup B$ 和 $k:B\to A\cup B$，使得对任意集合 D 及任意函数 $f:A\to D$ 和 $g:B\to D$，都存在唯一的函数 $\varphi:A\cup B\to D$ 使

$f=\varphi\circ h$ 且 $g=\varphi\circ k$.

六、(10 分)

证明：若 n 阶简单无向图 G 的任意两个结点的度数之和大于等于 n-1，则 G 是连通的。

七、(10 分)

设 A 为非空集合，$\Pi=\{\pi|\pi$ 为 A 的划分$\}$。若令

$R=\{<\pi,\pi'>|\pi,\pi'\in\prod$ 且对每个 $u\in\pi$ 皆有 $v\in\pi'$ 使 $u\subseteq v\}$

试证明 R 为 II 上的半序。

八、（10 分）

任给 52 个整数，证明其中必有两数之和能被 100 整除或两数之差能被 100 整除。[提示：考虑一个整数被 100 除所得的余数。]

九、（15 分）

用自然推理系统证明：

I） $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vdash A \vee B$ **（8 分）**

II） $\vdash (\forall x)(\exists y)(P(x) \to P(y))$ **（7 分）**

十、（10 分）

试求 $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ **的充要条件，并加以证明。**

其中， $P(A)$ **表示** A **的幂集。**

十一、（15 分）

用自然推理系统证明：

I）（8 分） $\neg A \to B \vdash A \vee B$

II）（7 分） $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \vdash (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$