

国防科技大学研究生院 2003 年硕士生入学考试

432-离散数学 试题 题单号: 40632

(可不抄题)

考生注意: 答案必须写在统一配发的答题纸上!

一、(每小题 10 分, 共 20 分)

设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的二元关系 R_1 和 R_2 定义如下:

$$R_1 = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle \}$$

$$R_2 = I_A \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle \}$$

i) 试分别指出 R_1 和 R_2 所具有的性质 (即 是否具有自反性, 反自反性, 对称性, 反对称性和传递性这五种性质)。

ii) 试求出 R_{12} , R_{22} , $R_1 \circ R_2$, R_1^+ 和 R_2^+ 。

二、(15 分)

设函数 $f: X \rightarrow Y$ 且 $g: X \rightarrow Y$, 若令

$$A = \{a \in X \mid g(f(a)) = a\} \text{ 且 } B = \{b \in Y \mid f(g(b)) = b\}$$

则 $f[A] = B$ 。

三、(20 分)

设 A 为有限集且 $f: A \rightarrow A$, 证明:

a) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$, 则 f 为双射;

b) 若 f 为双射, 则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$ 。

四、(15 分)

求合式公式 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow R$ 的主合取范式和主析取范式。

五、(15 分)

试判断下列合式公式是否为永真式, 并证明你的结论:

$$(Ax)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (Ax)P(x) \vee (Ey)Q(y), \text{ 其中 } P \text{ 和 } Q \text{ 均为一元谓词。}$$

六、(每小题 10 分, 共 30 分)

用自然推理系统证明:

$$i) \neg A \wedge \neg B \vdash \neg(\neg A \rightarrow B)$$

$$ii) \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash \neg A \wedge \neg B$$

$$iii) (Ex)(\neg A(x)) \vdash \neg(Ax)A(x)$$

七、(15 分)

试求叶的权分别为 2, 3, 3, 4, 5, 6, 8 的最优叶加权二叉树及其叶加权路径长度。

八、(20 分)

设 n 阶简单无向图 G 的边数 $m > (1/2)(n-1)(n-2)$, 则 G 为连通的。