



三 峡 大 学

2006 年研究生入学考试试题

考试科目： _____ 数学分析 _____

(考生必须将答案写在答题纸上)

一、 本大题共九个小题，每小题 10 分，共 90 分。

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

3. 求函数 $y = x - 2 \arctan x$ 的极值、拐点与渐近线.

4. 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定的隐函数. 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

5. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, 计算积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f^2(x) dx = 1$. 证明:

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}.$$





7. 求曲线积分 $I = \int_C (y^2 - \cos y)dx + x \sin y dy$, 其中 C 为曲线 $y = \sin x$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(\pi,0)$ 的一段.

8. 证明: 数列 $\{\sin n\}$ 发散.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有连续的三阶导数, 并 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 0$, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

二、 本大题共四个小题, 每小题 15 分, 共 60 分.

1. 证明: $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

2. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负, 存在三阶导数, 且方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内有两个相异实根, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'''(\xi) = 0$.

3. 设函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}, x \in (0, +\infty)$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, 并计算

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx .$$

4. 证明: 若 $z = f(x, y)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处存在两个偏导数, 且 $f_x(x, y)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 处可微.

