

湖北工业大学

二〇〇七年招收硕士学位研究生试卷

试卷代号 809

试卷名称 近世代数

- ① 试题内容不得超过画线范围，试题必须打印，图表清晰，标注准确
② 考生请注意：答题一律做在答题纸上，做在试卷上一律无效。

一、(满分 15 分)

设 $G = \mathbb{Q} - \{1\}$ (\mathbb{Q} 为有理数集), 定义 G 上的二元运算 \circ 为:

$$a \circ b = a + b - ab, \quad \text{证明: } (G, \circ) \text{ 构成一个群.}$$

二、(满分 15 分)

设群 G 中元素 a 的阶为 $n (< \infty)$, 证明: 对任意的正整数 m , 若 $a^m = e$ (e 为 G 的单位元), 则 $n | m$

三、(满分 15 分)

设 G 是一个群, 证明: 如果映射 $\varphi: x \rightarrow x^3$ 是 G 到 G 的一个单同态, 则 G 是一个交换群。

四、(满分 20 分)

设 R 为环, 且对每个 $a \in R$, 都有 $a^2 = a$, 证明:

- (1) R 为可换环;
- (2) 若 R 至少包含三个元素, 则 R 不是整环

五、(满分 15 分)

设 $F[x]$ 是数域 F 上的一元多项式环, 试求 $F[x]$ 上的一个理想。

六、(满分 15 分)

写出对称群 S_n 的所有正规子群。
您的所有资料源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料, 请访问 <http://download.kaoyan.com>

七、(满分 20 分)

设 R 是一个环, 定义 R 的中心: $C(R) = \{c \in R \mid \text{对任意的 } x \in R \text{ 有 } cx = xc\}$,

求证: (1) $C(R)$ 是 R 的子环;

(2) 若 R 是除环, 则 $C(R)$ 是域.

八、(满分 20 分)

设 φ 是环 R 到环 \bar{R} 的一个非零满同态

(1) 如果 R 有单位元时, 证明 \bar{R} 也有单位元

(2) 当 \bar{R} 有单位元时, R 是否有单位元?

九、(满分 15 分)

设 R 是由数域 F 上一切形如 $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ 的二阶方阵作成的集合, 问 R 对矩阵

的普通加法与乘法是否作成环和域?