

## 武汉科技大学

### 2005 年硕士研究生入学试题

课程名称: 数学分析 (314) 页数: 3 页 (总页数)

可使用的工具: 计算器 ( ☐ )

答题内容写在答题纸上, 写在试卷上一律无效。

一、填空 (每空 6 分, 共 60 分)

1.  $f(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x}{n-2} \right)^n$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_。

2. 函数  $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$  间断点的个数为 \_\_\_\_\_。

3.  $f'(x_0) = 2$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} =$  \_\_\_\_\_。

4.  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 则  $dz =$  \_\_\_\_\_。

5.  $y = y(x)$  是由  $e^{x+y} + xy = 1$  所确定的函数, 则

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_。

6. 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 则  $\int_0^\pi f(x) dx =$  \_\_\_\_\_。

7. 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间是  $(-9, 9)$ , 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^{2n-1}$  的收敛区间为 \_\_\_\_\_。

8. 设  $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ , 则  $\iint_D (x+y+1) dx dy =$  \_\_\_\_\_。

9.  $V$  是由曲面  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  及平面  $z = 4$  围成的立体, 则

$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv =$  \_\_\_\_\_。

10. 已知  $f(x, y)$  具有二阶连续偏导数,  $z = f(x+y, e^x)$ ,

则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$  \_\_\_\_\_。

二、(15分)  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases},$

其中  $g(x)$  具有二阶导数, 且  $g(0) = 1$ 。

1) 求常数  $a$  的值使  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

2) 求  $f'(x)$

三、(15分) 叙述函数  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上一致连续的定义。并证明:  $y = \sqrt{x}$  在  $[1, +\infty)$  上一致连续。

四、(15分) 求  $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$  的值, 其中  $L$  为逆时针的单位圆  $x^2 + y^2 = 1$ 。

五、(15分) 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 且对任意的连续偶函数都有

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0. \text{ 证明 } f(x) \text{ 是 } [-1, 1] \text{ 上的奇函数。}$$

六、(15分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导且  $f'_+(a)f'_-(b) < 0$ , 证明, 至少存在一点  $c \in [a, b]$  使得  $f'(c) = 0$

七、(15分)

设  $f_n(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数列且在  $[a, b]$  上  $f_n(x)$  一致收敛于  $f(x)$ 。若对任意  $n$ ,  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上都有零点, 证明在  $[a, b]$  上  $f(x)$  也存在零点。