武汉科技大学

2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码： 数学分析 （314） 共 2 页 第 1 页

说明：1. 适用招生专业：应用数学

2. 可使用的常用工具：计算器、圆规、直尺、橡皮

3. 答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。

4. 考试时间 3 小时，总分值 150 分。

一、计算下列各题（每题 8 分，共 64 分）

1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2})^n$

2．求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})$

3．求 $\int x\sqrt{1-x}\,\mathbf{d}x$

4．求 $\int_0^1 f(x)\mathbf{d}x$，其中 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} e^{-y^2/2}\mathbf{d}y$

5．设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 所确定的函数，

其中 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\frac{\mathbf{d}^2y}{\mathbf{d}x^2}$。

6．已知 $z=(1-2xy)^{3x}$，求 $\mathbf{d}z$

7．求 $I=\int_L(2xy-2y)\mathbf{d}x+(x^2-4y)\mathbf{d}y$，其中 L 为逆时针

圆周：$x^2+y^2=9$

8．求 $\iiint\limits_\Omega[(x-1)^2+y^2+z^2]\mathbf{d}v$，其中 Ω 为：$x^2+y^2+z^2\leq 1$

二、（16 分）证明：对正整数 $n>1$，方程

$\sin x+\sin^2 x+\Lambda+\sin^n x=1$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 内有唯一的实根 x_n，

并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

三、（16 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathbf{d}t$。

1．求 $\varphi'(x)$

2．讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

四、（16 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathbf{d}x$，

1．求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$

2．对任意 $\lambda>0$，求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

五、（16 分）设 $f(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，

且 $f_1'(0,0)=f_2'(0,0)=f(0,0)=0$

1．求 $\dfrac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}t^2}f(tx,ty)$。

2．证明：

$$\int_0^1(1-t)[x^2f_{11}''(tx,ty)+2xyf_{12}''(tx,ty)+y^2f_{22}''(tx,ty)]\mathbf{d}t=f(x,y)$$

六、（12 分）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

证明：$\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px\mathbf{d}x=0$

七、（10 分）设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，且

$f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，证明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。