

## 武汉科技大学

### 2007 年硕士研究生入学考试试题

考试科目及代码： 数学分析 (314) 共 2 页 第 1 页

- 说明：1. 适用招生专业：应用数学、概率论与数理统计  
2. 可使用的常用工具：计算器、圆规、直尺、橡皮  
3. 答题内容写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。  
4. 考试时间 3 小时，总分值 150 分。

一、计算下列各题（每题 9 分，共 72 分）

1. 求  $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$  的间断点，并判别间断点的类型。

2. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 3^x) \sin \frac{2}{x}$

3. 求  $\int \frac{x}{2x+1} dx$

4. 设函数  $y = y(x)$  是由下述参数方程确定，求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$

$$\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$$

5. 在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上的第一象限内求一点  $P$ ，使此点处的切线与椭圆、两坐标轴构成的平面图形面积最小。

6. 求  $\iint_D xye^{-x^2-y^2} dx dy$ ，其中  $D$  为  $x^2 + y^2 \leq 1$  在第一象限的部分。

7. 求  $\iiint_V [x+z] dv$ ，其中  $V$  为：由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
 围成的立体。

8. 将  $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$  展成幂级数

二、(16分) 求幂级数  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$  的收敛区间与和函数。

三、(16分) 求证  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  在  $(0, 0)$  处不可微。

四、(12分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导,  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 且在  $(a, b)$  内取得最大值。求证方程

$f'''(x) = 0$  在  $(a, b)$  内至少有一个实根。

五、(12分) 证明  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  的充分必要条件是: 对于任何单调递减序列  $x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0, (n \rightarrow \infty)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

六、(12分) 设  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^3}, x \in [0, +\infty)$  证明:

1.  $n \rightarrow +\infty$  时,  $f_n(x)$  一致收敛于 0;

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 0$

七、(10分) 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有定义, 对区间  $(a, b)$  内的每一点  $\xi$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap (a, b)$  时, 如  $x < \xi$ , 则  $f(x) < f(\xi)$ ; 如  $x > \xi$ , 则  $f(x) > f(\xi)$ 。

证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内严格递增。