数学分析解答

1. $x_1=0$，$x_2=1$ 为间断点

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$　x_1 为无穷间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$，$x_2$ 为可去间断点

2. 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(1+3^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot\frac{1}{1+3^x}\cdot 3^x\cdot\ln 3}{1}=2\ln 3$

3. 原式 $=\frac{1}{2}\int\dfrac{2x+1-1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\left[\int dx-\int\dfrac{1}{2x+1}dx\right]$

$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+c$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=\cancel{(1+t)}(3t+2)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{[(1+t)(3t+2)]'}{1-\frac{1}{1+t}}$

5. 设点 $P(x_0,y_0)$，切线斜率 $k=y'=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

切线方程 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ 截距为 $\dfrac{a^2}{x_0}$，$\dfrac{b^2}{y_0}$

图形面积 $S=\frac{1}{2}\dfrac{a^2b^2}{|x_0y_0|}-\frac{1}{4}\pi ab$　$A=x_0y_0=\dfrac{bx_0}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}$

可得 $x_0=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 为 A 的极大值点，即为 S 的极小值点.

此时 $y_0=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$，∴ $P=P(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 即为所求.

6. 原式 $=\int_0^1 xe^{-x^2}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ye^{-y^2}dy$

$=\int_0^1 xe^{-x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\int_0^1 xe^{-x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-(1-x^2)}+\frac{1}{2}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 xe^{-x^2}dx+\frac{-1}{2}\int_0^1 xe^{-1}dx$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-1}}{2}x^2\Big|_0^1\right]=-\frac{1}{4}e^{-1}+\frac{1}{4}-\frac{e^{-1}}{4}=-\frac{2}{4}e^{-1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(1-\frac{2}{e})$

7. 原式 $=0+\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\, dr=\frac{\pi}{8}$

9. $f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n}x^n\qquad x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

二. 解．收敛域为 $[-1,1]$

记 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$

$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$

$S'(x)=-\ln(1-x)$

$S(x)=x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)\qquad x\in[-1,1)$

三. 证明．$f_x'(0,0)=0$，$f_y'(0,0)=0$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta f-0}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\underset{当\Delta x=\Delta y时}{\not\to}0$ ∴不可微.

四、设 c 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点. $c\in(a,b)$ $\therefore f'(c)=0$

$\exists\, x_1, x_2\in(a,b)$ 使 $f''(x_1)=f''(x_2)=0$

$\therefore \exists\, \xi\in(x_1,x_2)$ 使 $f'''(\xi)=0$.

五、$\Longrightarrow$ 由海涅定理可得.

$\Longleftarrow$ 反证法. 若 $f(x)\not\to A$ $(x\to x_0^+)$

即 $\exists\, \varepsilon_0>0$, 对 $\forall\delta$, 总有 x_δ: $0<x_\delta-x_0<\delta$, 但 $|f(x_\delta)-A|\geq\varepsilon_0$

取 $\delta_1=1$, $\exists\, x_1$, $0<x_1-x_0<1$, $|f(x_1)-A|\geq\varepsilon_0$

$\delta_2=2^{-1}$, $\exists\, x_2$, 且 $x_2<x_1$, $0<x_2-x_0<\frac{1}{2}$, $|f(x_2)-A|\geq\varepsilon_0$

$\vdots$

$\delta_n=\frac{1}{n}$, $\exists\, x_n$, $x_n<x_{n-1}$, $0<x_n-x_0<\frac{1}{n}$, $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$

则 $x_n\downarrow$, $x_n\to x_0$, 但 $f(x_n)\not\to A$, 矛盾

六、证明. $|f_n(x)-0|=\dfrac{x}{1+n^3x^3}=\dfrac{x}{1+nx}\cdot\dfrac{1}{(nx-1)^2+nx}$

$\leq\dfrac{x}{1+nx}\cdot\dfrac{1}{nx}=\dfrac{1}{n(1+nx)}\leq\dfrac{1}{n}\to 0\quad\forall\, x\in[0,+\infty)$

$\therefore f_n(x)\rightrightarrows 0$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,dx=0$

七、$\forall\, x_1<x_2$, $x_1, x_2\in(a,b)$, 由假设, 存在有限个开区间覆盖 $[x_1,x_2]$.

设不妨有限个开区间记为 (c_i,d_i) $i=1,\cdots,n$. 可证结论.