武汉科技大学

2007 年硕士研究生入学试题

课程名称：（420）**高等代数**　　　　　　　　页数：4 页（总页数）

说明：1. 可使用的工具：计算器 （　　√　　）

2. 答题内容写在答题纸上，写在试题纸或草稿纸上无效。

3. 适用专业:应用数学、概率论与数理统计。

4. 考试时间 3 小时，总分值 150 分。

注意：以下试题中： A^* **表示** A **的伴随矩阵，** A^T **表示** A **的转置，** $tr(A)$ **表示** A **的对角元素的和。**

一、填空（共 5 小题 30 分）

1．矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$的逆矩阵为 ________________。

2．已知$(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$，则$(a,b)=$____________。

3．$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$A_{ij}$（$i=1,2,3$ ； $j=1,2,3$）是其代数余子式，已知$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，

则$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$__________。

4．曲面$x^2+2axy+y^2+z^2=1$为椭球，则a应满足的条件是：

__________________。

5． A 为 2×4 阶矩阵， B 为 4×2 阶矩阵，已知 AB 的特征值为 2 和 5。 则 BA 的四个特征值分别为 ______________。

二、单项选择题（共 5 小题 30 分）

1．设 A 为 n 阶方阵（$n\geq2$），则 $|A|=0$ 的充分必要条件是___

A） A 中必有两行元素成比例；

B） A 中必有一行元素全为 0；

C） A 的行向量组线性相关 ；

D） A 中任意一行元素是其余各行的线性组合。

2．已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$ ，

则 a、b、c 满足______

A） a、b、c 互不相等；　　B） $a=b=c$ ；

C） a、b、c 中恰有两个相等；　　D） $a^2+b^2+c^2\neq0$

3． A、B 为 n 阶实对称阵，则______

A） A^2+B^2 的行列式大于 0 ；

B） 存在 n 阶方阵 C 使得 $A^2+B^2=C^2$；

C） AB 正定 ；

D） $A+B$ 的特征值全大于 0。

4．T 为 n 维线性空间 V 上的可逆线性变换，

则**不正确**的是________

A） T 的特征值均不为 0　　　B） T 的值域空间为 V

C） T 在任何基下的矩阵可逆　D） $T^{-1}(0)$ 的维数为 1。

5．A、B 都为 n 阶可逆方阵，则__________。

A） $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　B） $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

C） $|A+B|=|A|+|B|$　　　　　D） $(AB)^T=B^TA^T$

三、（10 分）

讨论下述向量组的线性相关性：

$\alpha_1=(a_1-b_1,a_1-b_2,\Lambda,a_1-b_n)$，$\alpha_2=(a_2-b_1,a_2-b_2,\Lambda,a_2-b_n)$，

----，$\alpha_n=(a_n-b_1,a_n-b_2,\Lambda,a_n-b_n)$。

四、（10 分）$V=\{ae^t+bt+c\mid a,b,c\in R^1\}$，

D 为微分算子：$Df=f'$，$f\in V$

求 V 的一组基与维数，并求 D 在此基下的矩阵。

五、（15 分）已知下述二次型是半正定的，但不是正定的。

$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

求 a_1,a_2,a_3。

六、（15 分）$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$A=\lambda E+B$，求 B^3，B^n，A^n。

七、（40 分）

1．$\underline{A}$、$\underline{B}$ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 $\underline{AB}=\underline{BA}$ 求证：

<1> 如果 λ_0 是 $\underline{A}$ 的一个特征值，那么 $V_{\lambda_0}=\{\alpha \mid \underline{A}\,\alpha=\lambda_0\alpha\}$ 是 $\underline{B}$ 的不变子空间。

<2> $\underline{A}$、$\underline{B}$ 有公共特征向量。

2．A、B 为 n 阶实对称阵，且 A 正定，求证：方程组 $BABx=0$，与方程组 $ABx=0$ 同解

3．A 为 n 阶实对称阵，$\lambda_1\neq\lambda_2$ 都是 A 的特征值，α_1、α_2 为相应于 λ_1、λ_2 的特征向量，求证 α_1、α_2 正交。

4．$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 为实方阵，其中 $b>0,c>0$，求证 A 可与对角阵相似。