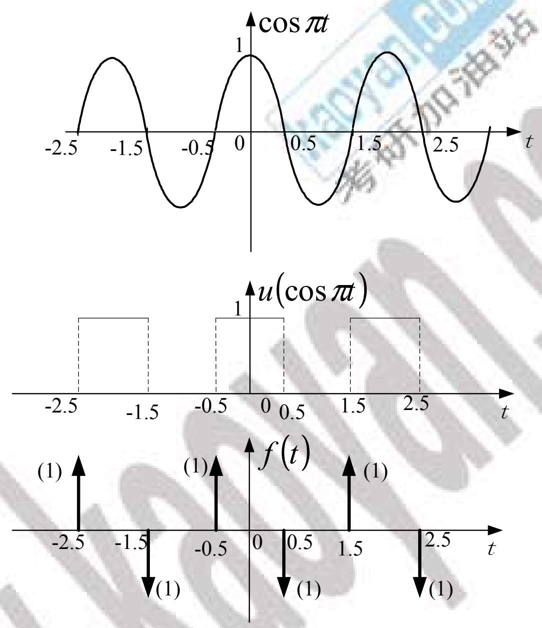
2009年信号与系统硕士生入学试题答案

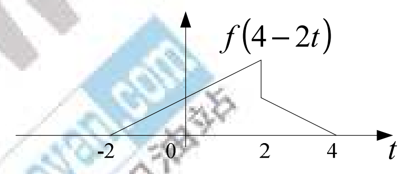
一、画出下列信号波形：（15分）

$$f(t)=\frac{d}{dt}[u(\cos\pi t)]$$

解： $f(t)=\frac{d}{dt}[u(\cos\pi t)]$ 的波形如图所示。



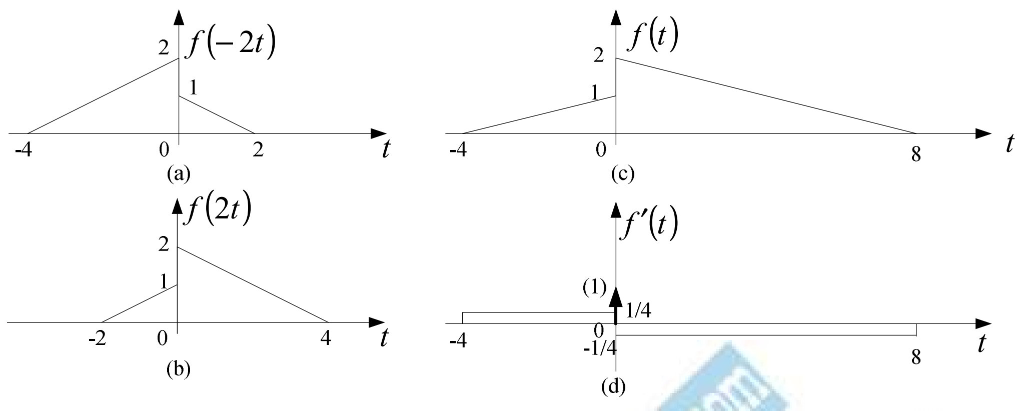
二、已知信号的波形如图所示，分别画出 $f(t)$ 与 $\frac{df(t)}{dt}$ 的波形。（15分）



题2图

解：

$$f(4-2t)\to f[-2(t-2)]\to f[-2(t-2+2)]\xrightarrow{\text{左移}2}f(-2t)\xrightarrow{\text{反转}}f(2t)\xrightarrow{\text{横坐标扩展一倍}}f\left(\frac{1}{2}\times 2t\right)=f(t)$$



三、计算（每题 10 分，共 30 分）

1、$\int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t)\frac{\sin 2t}{t}dt$

2、$\int_{-2}^{4} \delta'(t-2)\sin\frac{\pi}{2}tdt$

3、$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$

解：

1、$\int_{-\infty}^{\infty} 4\delta(t)\frac{\sin 2t}{t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} 8\delta(t)\frac{\sin 2t}{2t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} 8\delta(t)\cdot 1dt = 8$

2、$\int_{-2}^{4} \delta'(t-2)\sin\frac{\pi}{2}tdt = (-1)\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)'\Big|_{t=2} = -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\times 2\right) = \frac{\pi}{2}$

3、$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$

因为对于形如 $\delta[f(t)]$ 的冲激信号，若 $f(t)=0$ 有 m 个互不相等的实根，有

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$$

又 $(t^2-4)'\Big|_{t=\pm 2} = \pm 4$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}[\delta(t+2)+\delta(t-2)]dt = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$$

四、已知 $f(t)$ 的傅里叶变换是 $F(j\omega)$，求下列函数的傅里叶变换（每题 10 分，共 30 分）

解：

1、

$$f(2t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

$$-jtf(2t) \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{2}F\left(j\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

$$tf(2t) \Leftrightarrow j\frac{1}{2}F'\left(j\frac{\omega}{2}\right)$$

解：

2、$(t-2)f(t)=tf(t)-2f(t) \Leftrightarrow jF'(j\omega)-2F(j\omega)$

解：

3、

$$-jtf(t) \Leftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

$$-jt\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega}[j\omega F(j\omega)]$$

$$t\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow -[F(j\omega)+\omega F'(j\omega)]$$

五、已知 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$, 求其傅里叶变换 $F(j\omega)$，并证明 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin t}{t}=\pi$ 。（20 分）

解：

$$g_\tau(t) \Leftrightarrow 2\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega}, \qquad \tau=2$$

$$g_2(t) \Leftrightarrow 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

所以利用傅里叶变换的对称性

$$2\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow 2\pi g_2(-\omega) = 2\pi g_2(\omega)$$

$$\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \pi g_2(\omega)$$

即 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \pi & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

令 $\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

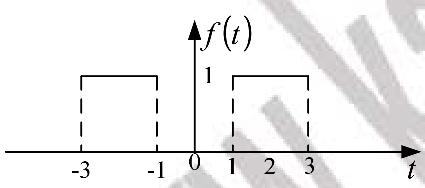
六、已知 $F(j\omega) = 4Sa(\omega)\cos 2\omega$，求反变换 $f(t)$，并画出 $f(t)$ 的波形。（20 分）

解：

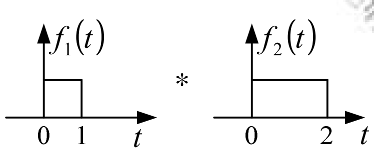
$$F(j\omega) = 4Sa(\omega)\cos 2\omega = 4Sa(\omega)\frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2} = 2Sa(\omega)e^{j2\omega} + 2Sa(\omega)e^{-j2\omega}$$

Θ $2Sa(\omega) \Leftrightarrow g_2(t)$ $\quad\therefore\quad$ $2Sa(\omega)e^{j2\omega} \Leftrightarrow g_2(t+2)$ $\quad$ $2Sa(\omega)e^{-j2\omega} \Leftrightarrow g_2(t-2)$

$f(t) = g_2(t+2) + g_2(t-2)$



七、已知 $f_1(t), f_2(t)$ 如图 2 所示，求 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$，并画出 $f(t)$ 的波形。（20 分）



解：

$$f_1(t)=u(t)-u(t-1)\Leftrightarrow \frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)$$

$$f_2(t)=u(t)-u(t-2)\Leftrightarrow \frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}=\frac{1}{s}\left(1-e^{-2s}\right)$$

$$f_1(t)*f_2(t)\Leftrightarrow \frac{\left(1-e^{-s}\right)\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2}=\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s}\right)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=tu(t)-(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)+(t-3)u(t-3)$$