华 中 师 范 大 学

二OO一 年研究生入学考试试题

招生专业　　　　　　　　　　　　研究方向

考试科目　数学分析　　　　　　　考试时间　元月14日上午

一、(24分) 求下列极限(要有主要计算步骤)

1、$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

2、$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$

3、$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$

二、(15分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足

$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$　　任 $x,y\in[a,b]$

(其中 $M>0,\alpha>1$ 为常数)。证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数。

三、(15分) 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\cdot e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

四、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$，并在 $c\in(a,b)$ 点有 $f(c)=\max\limits_{a\leq x\leq b}f(x)$，

证明方程 $f'''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根。

五、(10分) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$。证明：

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{24}\quad 其中\quad M=\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

六、(10 分) 记 $F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos xy\, dy$. 证明

1) $2F'(x)+xF(x)=0$

2) 求 $F(x)$.

七、(8 分) 设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内有二阶连续的偏导数，且

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\neq 0$

证明：$z=f(x,y)$ 的最大值、最小值只能在区域的边界上取得.

八、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可微，且 $|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1$.

证明 $|f'(x)|\leqslant 2$.