华　中　师　范　大　学

二OO五年研究生入学考试试题

招生专业：**数学**　　　　研究方向：**基础数学，应用数学，概率论与数理统计，运筹学与控制论**

考试科目及代码：**数学分析（347）**　　　　考试时间：元 月 23 日 上 午

一、（共 45 分）求下列极限或指定函数的值：

1. (10 分) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1!+2!+3!+\cdots\cdots+n!}{n!}$；

2. (10 分) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\dfrac{(2n-1)}{2n}}$；

3. (10 分) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3-x^2+\dfrac{x}{2})\cdot e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}]$；

4. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^3$，

求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 的值.

二、（共 15 分）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且在 (a,b) 上 $g'(x)\neq 0$，

证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

三、（共 15 分）设函数 $f(x)$ 在 [2, 4] 上有连续的一阶导函数，且 $f(2)=f(4)=0$，

证明：$\max\limits_{2\le x\le 4}|f'(x)|\ge|\int_2^4 f(x)dx|$.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

四. (共 13 分) 设有方程 $x = m + q \cdot \sin x, (0 < q < 1)$.

若 $x_0 = m$， $x_1 = m + q \cdot \sin x_0, \ldots,$ $x_{n+1} = m + q \cdot \sin x_n, \ldots\ldots,$

证明: $\{x_n\}$ 收敛;

设 $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = l$，再证明 l 是方程 $x = m + q \cdot \sin x$ 的唯一解.

五.(13 分) 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^x - (1 + \frac{x}{n})^n)$ 在任何有穷区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

六.(13 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

$$f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

七. (13 分) 设 $a_1, a_2, \ldots. a_n, \ldots.$ 均为常数, 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \cdot e^{-t} dt$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

八. (13 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, $f(x) \ge c > 0$ ，用可积准则证明: 函数

$\ln f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

九. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数, 证明: 在 (a,b) 内存在 ξ,

使得, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 \cdot f''(\xi)$.