200 3 年中国地质大学研究生院

应用数学 专业研究生入学考试 数学分析 试题

1.（本题满分 10 分）

计算 $\int\sqrt{1+\sin x}dx$

2.（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ 确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

3.（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x\frac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}$

4.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 有界，$\{b_n\}$ 收敛于零，证明数列 $\{a_nb_n\}$ 收敛于零.

5.（本题满分 10 分）

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n Sin\frac{1}{3^n x}$，$x\in(0,+\infty)$. 问其在 $x\in(0,+\infty)$ 上收敛吗？一致收敛吗？证明你的结论

6.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是上连续函数. 求证：$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$

7.（本题满分 10 分）

设 $w=yf(x+y,x^2y)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$

8.（本题满分 10 分）

计算积分 $I=\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}d\sigma$，

其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$ 所围成的区域.

9.（本题满分 10 分）

求曲面积分 $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，

其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

10.（本题满分 10 分）

设 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[0,a]$ 上连续，$f(x)$ 对任何 x 均有 $f''(x)\geq 0$，且能构成复合函数. 求证：$\int_0^a f[\varphi(t)]dt\geq f[\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt]$

11.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上三阶导数连续，$f''(a)=f''(b)$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得：

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi).$$

12.（本题满分 10 分）

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛区间，并求和函数.

13.（本题满分 10 分）

设 $\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{x^\alpha}dx$. 讨论收敛性.

14.（本题满分 10 分）

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n^s}$ $(s>0,\alpha>0)$ 的敛散性.

15.（本题满分 10 分）设 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 在区域 Ω 及其边界 S 上有二阶连续偏导数.

证明：（1）$\iiint\limits_\Omega u\Delta v d\Omega=\iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}ds-\iiint\limits_\Omega gradu\cdot gradv d\Omega$，

（2）$\iiint\limits_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)d\Omega=\iint\limits_S(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})ds.$