

318

27

中国地质大学研究生院

2004 年研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

适用专业: 应用数学

(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在本试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

准考证号码:

报考学科、专业:

姓名:

题
答
要
不
内
线
封
密

1. (本题满分 10 分)

计算 $\int \sec^n x dx$

2. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 由 $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}}$ ($a > 0$) 确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

3. (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \sin \frac{t}{a^n}$ ($t, a \neq 0$)

4. (本题满分 10 分)

设 $a > 1$, 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

5. (本题满分 10 分)

证明 (a, b) 上的连续函数为一致连续的充分必要条件为: $f(a+0), f(b-0)$ 存在且有限.

6. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续函数, 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, ($x, y > 0$)证明: $\int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} f(2)$.

7. (本题满分 10 分)

设 $u = \frac{y}{x}, v = y$, 证明等式 $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 可以化为 $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$.

8. (本题满分 10 分)

计算积分 $I = \iiint_{\Omega} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2} dV$, 其中 Ω 为 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

9. (本题满分 10 分)

求曲面积分 $\iint_S (x^2 + az^2) dy dz + (y^2 + ax^2) dz dx + (z^2 + ay^2) dx dy$.

其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

10. (本题满分 10 分)

求下列曲线所围的面积: $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{x^2 y}{c^3}$, $(a, b, c > 0)$

11. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有二阶导数, $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得:

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

12. (本题满分 10 分)

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 x 一致收敛, 但对任

何 x 非绝对收敛;

(2) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 关于 x 绝对收敛, 但非一致收敛.

13. (本题满分 10 分)

设 $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^a} dx$. 讨论收敛性.

14. (本题满分 10 分)

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ 的敛散性.

15. (本题满分 10 分) 设以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数为 a_n, b_n .

求 $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$ 的 Fourier 系数为 A_n, B_n .

并证明 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

共 1 页

第 1 页

注: ① 试题必须打印, ② 题与题之间不留答题间隔, ③ 试题必须打印在试题纸正面, ④ 试题格式要统一, 打印要工整、清楚, 符号应规范。