

中国地质大学研究生院

2005 年 硕士 研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学(统考) (310)

适用专业: 有关专业

(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 设 m, n 为正整数, 且 $m < n$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $f(x) = (x-100)(x-99)\cdots(x-1)x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 不定积分 $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设直线 $L_1: \frac{x}{2} = y = \frac{z}{-2}$, $L_2: x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, 则既平行于 L_1 又平行于 L_2 , 且过点 $(1, 1, 1)$ 的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 已知 D 是长方形域: $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1$, 且 $\iint_D yf(x) dx dy = 1$, 则 $\int_a^b f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 以 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ 为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{x^2} - \cos x$ 是 x^2 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 无穷小.
(A) 同阶但不等价; (B) 等价; (C) 高阶; (D) 低阶. 【A】
8. 点 $x=0$ 为函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 间断点.
(A) 可去; (B) 跳跃; (C) 无穷; (D) 振荡. 【C】

9. 设 $\varphi(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\varphi(x) > 0$, 则方程 $\int_0^x \varphi(t) dt - \int_x^1 \frac{1}{\varphi(t)} dt = 0$ 在区间 $(0,1)$

内根的个数为

(A) 0 个; (B) 1 个; (C) 2 个; (D) 3 个. 【 】

10. 设函数 $u = y\varphi(x^2 - y^2)$, 其中函数 φ 可导, 则 $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y}$ 等于

(A) $\frac{x}{y}u$; (B) $\frac{y}{x}u$; (C) xu ; (D) yu . 【 】

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^p}$ ($0 < p < 1$) 的收敛半径为

(A) 0; (B) p ; (C) 1; (D) $+\infty$. 【 】

12. 若向量 α, β, γ 线性无关, α, β, σ 线性相关, 则

(A) α 必可由 β, γ, σ 线性表示; (B) β 必可由 α, γ, σ 线性表示;

(C) σ 必可由 α, β, γ 线性表示; (D) σ 必不可由 α, β, γ 线性表示. 【C】

三、解答题 (本题共 10 小题, 满分 102 分. 解答写出演算步骤或证明过程)

13. (本题满分 10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2x} \sqrt{\sin t^2} dt}{x \sin x}$.

14. (本题满分 10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ a & x \geq 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} b & x < 0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$, 若要 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 a, b 应满足什么条件?

15. (本题满分 10 分) 已知 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$, $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求定积分 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

16. (本题满分 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$.

17. (本题满分 10 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ ($x \neq -1$) 的敛散性.

18. (本题满分 10 分) 求微分方程 $(1+y)dx + (x+y^2+y^3)dy = 0$ 的通解.

特别提醒：所有答案都必须写在答题纸上，写在试题纸上及草稿纸上无效。
考完后试题随答题纸一起交回。

19. (本题满分 12 分) 设抛物线 $y = x - x^2$, $0 \leq x \leq 1$, 过原点引一条直线, 使抛物线与 x 轴所围图形的面积被该直线二等分, 求该直线方程.

20. (本题满分 10 分) 设 n 阶矩阵 A 满足关系式 $A^3 + A^2 - A - E = 0$, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .

21. (本题满分 12 分) 若线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = -a_3 \\ x_4 + x_1 = a_4 \end{cases}$$
 有解, 则参数 a_1, a_2, a_3, a_4 应满足

什么条件?

22. (本题满分 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 证明存在 $\xi \in (0, \pi)$,

使 $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$.