

中国地质大学研究生院

2005年 硕 士研究生入学考试试题

考试科目: 497 高等代数与解析几何

适用专业: 应用数学

(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在本试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

一, (本题满分 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个多项式, 证明 $(f(x), g(x)) = 1$ 当且仅当 $(f(x) + g(x), f(x)g(x)) = 1$.

二, (本题满分 15 分) 设 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

三, (本题满分 15 分) 设秩 $A = \text{秩 } B = r$, 证明线性方程组 $AX = b$ 的解向量集合的秩是 $n-r+1$, 其中 $B = (A, b)$.

四, (本题满分 15 分) 令 A 为 $n \times s$ 的实矩阵, A 的 s 个列向量线性无关, 证明存在列向量线性无关的矩阵 $B_{n \times (n-s)}$, 使矩阵 $P = (A, B)$ 可逆, 且有 $B^T A = 0$.

五, (本题满分 15 分) 设 A 为 m 阶实对称正定矩阵, B 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $B^T A B$ 为正定矩阵的充分必要条件是秩 $B = n$.

六, (本题满分 15 分) 设 P 为数域, $A \in P^{n \times s}$, $B \in P^{s \times n}$, $\alpha \in P^n$, 证明

(1), $W = \{B\alpha \mid AB\alpha = 0\}$ 是 P^s 的子空间;

(2), $\dim(W) = r(B) - r(AB)$.

七, (本题满分 15 分) 设 σ, τ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换, 且 $\sigma^2 = \sigma, \tau^2 = \tau$,

证明:

(1), $(\sigma + \tau)^2 = (\sigma + \tau)$ 的充要条件是 $\sigma\tau = \tau\sigma = 0$;

(2), $\sigma(V) = \tau(V)$ 的充要条件是 $\sigma\tau = \tau$, $\tau\sigma = \sigma$.

八, (本题满分 15 分) 设 α 是欧式空间 V 的一个非零向量, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V$ 满足条件

$$(\alpha_i, \alpha) > 0 \ (i=1, 2, \dots, m), \quad (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \ (i, j=1, 2, \dots, m; i \neq j),$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

九, (本题满分 15 分) 化简方程 $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2xz + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$, 并指出它表示什么曲面.

十, (本题满分 15 分) 设一柱面的母线方向与三条坐标轴正向交成等角, 且其母线总是与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切, 求它的方程.