

华中科技大学

二〇〇二年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高等代数

适用专业: 应用数学、计算数学、概率统计 基础数学

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

以下各题每题 10 分, 共 100 分

一、设 A, B, C 为同阶方阵, 定义 $[A, B] = AB - BA$

求 $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B]$ 。

二、设 A 为实 n 阶对称矩阵, B 为实 n 阶反对称矩阵, 且 $AB = BA$,

$A - B$ 为可逆矩阵。证明: $(A + B)(A - B)^{-1}$ 是正交矩阵。

三、设 A, B 为 n 阶方阵, $A, B, A + B$ 均可逆。证明 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆。

四、证明平面上三条不同的直线: $ax + by + c = 0$, $bx + cy + a = 0$,

$cx + ay + b = 0$ 相交的充分必要条件是 $a + b + c = 0$ 。

五、设 A 为二阶方阵, 且存在正整数 $n \geq 2$, 使得 $A^n = 0$ 。证明 $A^2 = 0$ 。

六、设秩 $(A - I) = p$, 秩 $(B - I) = q$, 证明秩 $(AB - I) \leq p + q$ 。

七、设 A 为 n 阶半正定矩阵, 证明 $|A + 2I| \geq 2^n$ 。

八、设 A 为所有元素均为 1 的 n 阶矩阵, 求 A 的最小多项式。

九、设 V 为数域 P 上字母 x 的次数小于 n 的全体多项式与零多项式构成的向量空间, 定义 V 上线性变换

$$\sigma(f(x)) = xf'(x) - f(x)$$

1. 求 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 与值域 $\sigma(V)$;

2. 证明: $V = \sigma^{-1}(0) \oplus \sigma(V)$ 。

十、设 A, B 是数域 P 上两个 n 阶矩阵, $A^n = B^n = 0$, 但 $A^{n-1} \neq 0$, $B^{n-1} \neq 0$ 。证明 A 与 B 相似。