華中科技大学

二〇〇四年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数　　学（单）

适用专业：工科各专业

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

一、填空题（本题共5小题，每小题4分，共计20分）。

1．设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0;\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\ge 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$________。

2．设 $f'(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(a)-f(a-\frac{1}{n})]=$__________。

3．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的敛散性为__________。

4．设随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布，则 $EX=$__________。

5．设 A 为 n 阶方阵，则存在一个正整数 k，使得 $r(A^k)=$__________。

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，共计20分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内）

6．设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$[　　　]

（A）$\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$；　　（B）$\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos^4 x$；

（C）$x+\frac{1}{2}x^2$；　　（D）$x-\frac{1}{2}x^2$

试卷编号：396

7. 微分方程$xy'+y=e^x$的通解为[　　　]

（A）$\frac{1}{x}(c+e^x)$；　　（B）$x(c+e^x)$；

（C）$\frac{1}{x^2}(c+e^x)$；　　（D）$x^2(c+e^x)$

8. 设L为$x^2+y^2=R^2$，则$\int_L (x^2+y^2+2x)ds=$[　　　]

（A）$2\pi R^3$；　（B）πR^3；　（C）$3\pi R^3$；　（D）$4\pi R^3$

9. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，σ^2已知，μ未知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的平均长度为[　　　]。

（A）$1-\alpha$；　（B）α；　（C）$2u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$　（D）$u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

10. 齐次线性方程组$AX=0$的任何解与非齐次线性方程组$AX=b$的任何解[　　　]。

（A）必可相互线性表示；　　（B）必不可相互线性表示；

（C）必线性相关；　　（D）必线性无关

三、计算题（本题共10小题，每小题10分，共计100分）。

11. 设$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，$f''(t)\neq 0$，求$\frac{dy}{dx},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$。

12. 水流入半径为10m的半球形蓄水池，求水深$h=5m$时，水的体积V对深度h的变化率。如果注水速度是$5\sqrt{3}m^3/\min$，问$h=5m$时水面半径的变化速度是多少？

13. 某地区共800人，其中一人感染了某种传染病，12小时后，又有3人被感染。由于缺乏流行病常识，感染者没被隔离，且60或72小时后，医疗队才能到达，试给出医疗队到达时被感染人数的近似值，并对其作出解释。（设$y(t)$为时刻t时的感染人数，有$\frac{dy}{dt}=ky(800-y)$，k为比例常数。）

14. 求 $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$。

15. 计算 $\oiint_\Sigma \frac{1}{3}x^3dydz+\frac{1}{3}y^3dzdx+\frac{1}{3}z^3dxdy$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧，另求向量场 $F(x,y,z)=xy^2i+ye^zj+x\ln(1+z^2)k$ 在点 $p(1,1,0)$ 处的散度。

16. 将 $f(x)=\begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x<\frac{3}{2}\pi \end{cases}$ 展成以 2π 为周期的付里叶级数。

17. 设 A、B 为 3 阶方阵且满足 $A+B=AB, B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 A。

18. 用正交变换化 $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为平方和，并判定此二次型是否正定。

19. 叙述无偏估计的定义，若（$X_1,\cdots,X_n$）为总体 $X\sim B(n,p)$ 的一个样本，p 未知，求 p 及 p^2 的无偏估计。

20. 设在任何长为 t 的时间内，某大型设备发生故障次数 $N(t)\sim P(\lambda t)$，故障相互独立，已知在 $(0,T)$ 内恰好发生了一次故障，设 S 为发生故障的时刻。（1）求 $N(t)$ 的概率分布列；（2）求 ES。

四、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）。

21. 设 $f(x)$ 在[0，1]上可导，$f(0)=0, f(1)=2$，证明在[0，1]内存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}>\frac{1}{2}$。

22. 若 n 阶方阵的各行元素之和为 a，证明 A 必有特征值 a，又若 $A^2=A$，$A^T=A$，$|A|\neq 0$，A 是否为单位矩阵？何故？