绝密★启用前

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(四)试卷

(科目代码:304)

注意事项:

1. 答题前,考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填(书)写在试卷上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后,将试卷装入试题袋中。

得 分	评卷人

一. 填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ ________, $b=$ ________.

(2) 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$, 则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ________.

(3) 设$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 则$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\,dx=$ ________.

(4) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{P}$ 为三阶可逆矩阵,则 $\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$

________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵,且 $a_{11}=1$,$\boldsymbol{b}=(1,0,0)^T$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是________.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ________.

得 分	评卷人

(21)(本题满分13分)

设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2,$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值6的特征向量.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

得 分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$,$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:

(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ)$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

得 分	评卷人

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布,在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下,随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布,求:

(Ⅰ)随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(Ⅱ)Y 的概率密度;

(Ⅲ)概率 $P\{X+Y>1\}$.

题号	一	二	三									总 分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

得 分	评卷人

二. 选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,3)$　【　】

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　【　】

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　【　】

(10) 设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,但不一定满足 $F'(x)=f(x)$. 【　　】

(11) 设$f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,且$f'(a)>0$,$f'(b)<0$,则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$. 【　　】

(12) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则必有

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|\boldsymbol{B}|=a$.

(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时,$|\boldsymbol{B}|=0$.

(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,$|\boldsymbol{B}|=0$. 【　　】

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha\in(0,1)$, 数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若$P\{|X|<x\}=\alpha$, 则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. 【　　】

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$. 令随机变量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

(A) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$. (B) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$. (D) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$. 【　　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

得 分	评卷人

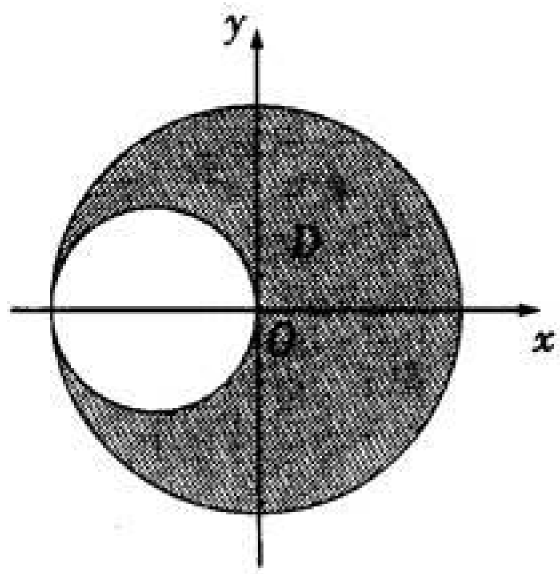
(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

得 分	评卷人

(16)(本题满分 8 分)

求$\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,d\sigma$,其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域(如图).



得 分	评卷人

(17)(本题满分 8 分)

设$f(u,v)$具有连续偏导数,且满足

$$f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv.$$

求$y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程,并求其通解.

得 分	评卷人

(18)(本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$,其中价格 $P \in (0, 20)$,Q 为需求量.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d > 0)$;

(Ⅱ)推导 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q(1 - E_d)$(其中 R 为收益),并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加.

得 分	评卷人

(19)(本题满分 9 分)

设 $F(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x \leqslant 0, \\ e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$ 之间的面积. 对任何 $t>0$, $S_1(t)$ 表示矩形 $-t \leqslant x \leqslant t, 0 \leqslant y \leqslant F(t)$ 的面积. 求

(Ⅰ) $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式;

(Ⅱ) $S(t)$ 的最小值.

得 分	评卷人

(20)(本题满分 13 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知$(1, -1, 1, -1)^T$是该方程组的一个解. 试求

(Ⅰ) 方程组的全部解,并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(Ⅱ) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.