二〇〇四年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目： 数　学

适用专业： 文科各专业

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

一、填空题（本题共5小题，每小题4分，共计20分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+4^n+6^n)^{\frac{1}{n}}=$______

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+x^{99})\sin^2 xdx=$____

3. 设A为三阶方阵，$|A|=2$，则$\|A^*|A|=$______

4. $|A_{5\times5}|=2$，则A^*的秩$r(A^*)=$________

5. 设矩阵$A_{m\times n}$的秩$r=3, n=5$，且$AX=b$有解，则其线性无关的解的个数为__________

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，共计20分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内）。

6. 设$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0;\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geq 1;\\ 0, & x<1.\end{cases}$则$\psi(\varphi(x))$为（　　）

（A）$\begin{cases}\sin x^2, & x\leq -1,\\ 0, & -1<x<0,\\ \sin 1, & x\geq 0.\end{cases}$　　（B）$\begin{cases}\sin x^2, & x\leq -1,\\ 1, & -1<x<0,\\ 0, & x\geq 0.\end{cases}$

（C）$\begin{cases}\sin 1, & x\leq -1,\\ 0, & -1<x<0,\\ \sin x^2, & x\geq 0.\end{cases}$　　（D）$\begin{cases}\sin x^2, & x\leq -1,\\ \sin 1, & -1<x<0,\\ 0, & x\geq 0.\end{cases}$

7. $y''-6y'+9y=0$的通解形式为（　　）

（A）$c_1x^2+c_2xe^{3x}$；　　（B）$e^{3x}(c_1+c_2x)$；

（C）$c_1e^{3x}+c_2$；　　（D）$c_1xe^{3x}+c_2$.

8. 设$f'(\ln x)=1+x, x>0$，则$f(x)=$（　　）

（A）$\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$；　　（B）$x+\frac{x^2}{2}+c$；

（C）$x+e^x+c$；　　（D）$\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+c$.

9. 设A,B为n阶方阵，且$r(A)=r(B)$，则（　　）

（A）$r(A-B)=0$；　　（B）$r(A^{-1})=r(B^{-1})$；

（C）$r(A\vdots B)=2n$；　　（D）$r(A\vdots B)\leq n$.

10. n阶实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件为（　　）

（A）所有K级子式$>0, K=1,\cdots,n$；　　（B）A的全体特征值≥ 0；

（C）A^{-1}为正定矩阵;　　（D）$r(A)=n$.

三、计算题（本题共 10 小题，每小题 10 分，共计 100 分）。

11．设 $\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

12．求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

13．求微分方程 $(x+1)y'-\alpha y=e^x(x+1)^{\alpha+1}$ 的通解，其中 $\alpha\neq 0$ 为常数。

14．计算 $\int\frac{1}{1+e^x}dx$

15．设某种商品的单价为 P，售出的商品数量 Q 可表示成 $Q=\frac{a}{b+P}-c$，其中 a,b,c 均为正常数，且 $a>bc$

（1）求 P 在何范围变化时，相应销售额增加或减少；

（2）要使销售额最大，商品单价 P 应取何值？

16．设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 A^{-1}

17．设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，且 $AB+I=A^2-B$，其中 I 为三阶单位矩阵，求 B

18．求非退化线性变换将 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 化为标准形，并求其秩，正惯性指标，负惯性指标。

19．讨论a,b取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

有唯一解，有无穷多解，无解，当有无穷多解时，求出方程组的全体解。

20．$\alpha_1 = [2,1,-3]^T, \alpha_2 = [3,2,-5]^T, \alpha_3 = [1,1,1]^T$是否为三维向量空间的一个基底？若是，求$\alpha = [6,2,-7]^T$在该基底下的坐标。

四．证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）。

21．设$f(x)$在[0，1]上连续，在（0，1）内可导，且$f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$，证明至少存在一个$\xi \in (0,1)$，使$f'(\xi) = 1$。

22．设$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$可逆且$a_{11} + a_{22} = 0$，问$A$是否可对角化？若可对角化给出证明，若不可对角化试举出反例。