绝密★启用前

2005年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试卷

（科目代码：301）

注意事项：

1. 答题前，考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填（书）写在试卷上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后，将试卷装入试题袋中。

得 分	评卷人

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上.）

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为__________.

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为__________.

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$ __________.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$ __________.

(6) 从数1,2,3,4中任取一个数，记为 X，再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$ __________.

密 封 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人

(21)(本题满分9分)

已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行是(a,b,c)，a,b,c不全为零，矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$为常数)，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解.

得 分	评卷人

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\quad 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

得 分	评卷人

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1,2,\cdots,n$.

求:(Ⅰ) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_n)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

题号	一	二	三									总 分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

得 分	评卷人

二. 选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.　　【　　】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.　　【　　】

(9) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　【　　】

(10) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$. 【　　】

(11) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　(B) $\lambda_2 \neq 0$.　(C) $\lambda_1 = 0$.　(D) $\lambda_2 = 0$.

【　　】

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\boldsymbol{B}^*$.　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\boldsymbol{B}^*$.　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

【　　】

(13) 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X = 0\}$与$\{X + Y = 1\}$相互独立，则

(A) $a = 0.2,\ b = 0.3$.　(B) $a = 0.4,\ b = 0.1$.

(C) $a = 0.3,\ b = 0.2$.　(D) $a = 0.1,\ b = 0.4$. 【　　】

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$.　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$.　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$.

【　　】

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

得分	评卷人

(15)(本题满分11分)

设$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$,$[1+x^2+y^2]$表示不超过$1+x^2+y^2$的最大整数.计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

（16）（本题满分 12 分）

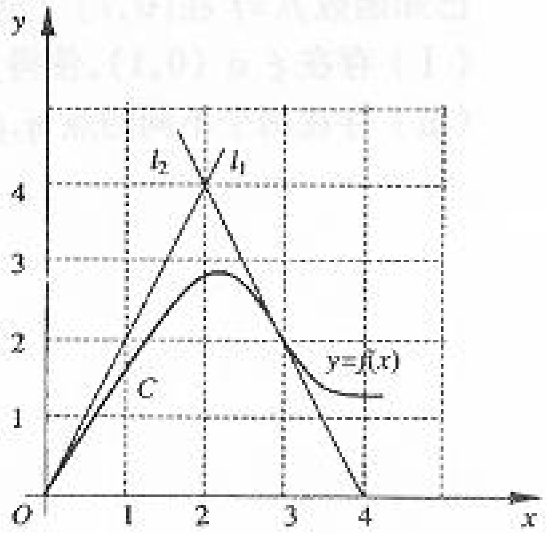
求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x$.



得分	评卷人

（18）（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（Ⅱ）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

得 分	评卷人

（19）（本题满分 12 分）

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

（Ⅰ）证明：对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

（Ⅱ）求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

（20）（本题满分 9 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

（Ⅲ）求方程 $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ 的解.

报考单位 考生姓名 考生编号

密 封 线 内 不 要 答 题