准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 答 题

二OO七年招收硕士研究生

入学考试自命题试题

考试科目：高 等 代 数

适用专业：基础数学 应用数学 计算数学 概率统计

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题纸上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

以下各题每题15分，共150分

一、设A为n阶方阵，若存在唯一的n阶方阵B，使得$ABA=A$，证明$BAB=B$。

二、证明平面上三条不同的直线$ax+by+c=0$，$bx+cy+a=0$，$cx+ay+b=0$相交的必要充分条件是$a+b+c=0$。

三、设V是实数域上所有n阶对称阵所构成的线性空间，对任意$A,B\in V$，定义

$$(A,B)=t_rAB$$

其中t_rAB表示AB的迹

1. 证明V构成一欧氏空间；
2. 求使$t_rA=0$的子空间S的维数；
3. 求S的正交补$S^{\perp}$的维数。

四、证明任意n阶实可逆阵A可以表成一个正定阵S与一个正交阵Q之积。

五、设三阶复方阵A,B,C,D有相同的特征多项式，证明其中必有两个方阵相似。

六、设σ是实数域R上线性空间V的线性变换，$f(x)$，$g(x)\in R[x]$，$h(x)=f(x)g(x)$，证明：

1. $\ker f(\sigma)+\ker g(\sigma)\subseteq \ker h(\sigma)$

2. 若$(f(x),g(x))=1$，则$\ker h(\sigma)=\ker f(\sigma)\oplus\ker g(\sigma)$

七、设A为n阶方阵，证明：

$$秩(A^3)+秩A\geq 2秩(A^2)$$

八、设A,B为n阶方阵，存在正整数ℓ，使$A^\ell=E$，其中E为n阶单位阵，证明：

1. A相似于对角阵；

2. 设$A^{\ell-1}B^{\ell-1}+\cdots+AB+E=0$，则$B$也相似于对角阵。

九、设A为二阶方阵，若有方阵B，使得$AB-BA=A$，证明$A^2=0$。

十、设A,B,C为n阶方阵，$C=AB-BA$，且C与A,B都可交换，证明存在不大于n的正整数m，使得$C^m=0$。