武汉大学一九九八年攻读硕士学位研究生入学考试试题解答

考试科目:数学分析　　　　编号:01A

一解：收敛，证明如下：设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a$，$\because \{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n}\}$ 及 $\{a_{n_k}\}\cap\{a_{2n+1}\}$ 均有无穷个元，故分别存在由 $\{a_n\}$ 的偶数下标项组成的 $\{a_{n_k}\}$ 的子序列 $\{a_{n_{k_l}}\}$ 及由奇数下标项组成的 $\{a_{n_k}\}$ 的子序列 $\{a_{n_{k_s}}\}$，显然 $\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_{k_l}}=\lim\limits_{s\to\infty} a_{n_{k_s}}=a$，即 $\{a_{2n}\}$ 及 $\{a_{2n+1}\}$ 分别存在子序列收敛于同一极限a。$\{a_{2n}\}$ 及 $\{a_{2n+1}\}$ 均为单调数列，而单调数列必有广义极限，且与其任一子序列的广义极限相等。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=a$。对 $\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=a$ 知 $\exists N_1$，使 $n>N_1$ 时有 $|a_{2n}-a|<\varepsilon$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=a$ 知 $\exists N_2$，使 $n>N_2$ 时有 $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$，令 $N=\max\{2N_1,2N_2+1\}$，则当 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$。

二证明：由不等式 $a^\alpha+b^\alpha\ge(a+b)^\alpha,(o<\alpha<1,a,b\ge0)$ 知对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_2>x_1$ 有 $x_1^\alpha+(x_2-x_1)^\alpha\ge x_2^\alpha$，$\therefore x_2^\alpha-x_1^\alpha\le(x_2-x_1)^\alpha(0<\alpha<1)$。由题设条件，对 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 有 $\left|f(x_2^\alpha)-f(x_1^\alpha)\right|\le m|x_2-x_1|^\alpha$，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $\left|f(x_2^\alpha)-f(x_1^\alpha)\right|<m\varepsilon$ $\therefore f(x^\alpha)(0<\alpha<1)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

三证明：因对 $\forall\varepsilon>0$，$\frac{x^n}{1+x}$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 一致收敛到0，故对上述 $\varepsilon>0,\exists N$，使当n $>N$ 时有 $\left|\frac{x^n}{1+x}\right|<\frac{\varepsilon}{2},(x\in[0,1-\varepsilon]$，又 $\left|\frac{x^n}{1+x}\right|\le\frac{1}{2},(x\in[1-\varepsilon,1])$，于是当n $>N$ 时

$$\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}dx+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|\le\int_0^{1-\varepsilon}\left|\frac{x^n}{1+x}\right|dx+\int_{1-\varepsilon}^1\left|\frac{x^n}{1+x}\right|dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$。

四证明：1）由f（x）=0得 $\|f_n(x)-f(x)\|=\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{x}{1+n^3x^3}\right|=\left|\frac{2}{3\sqrt[3]{2}n}\right|$，现有

$\|f_n(x)-f(x)\|\to0(n\to\infty)$，因此 f_n 一致收敛于0，x $\in[0,+\infty)$。

2）$\left|\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\right|=\left|\int_0^1f_n(x)dx+\int_1^{+\infty}f_n(n)\right|\le\int_0^1|f_n(x)|dx+\int_1^{+\infty}\frac{n}{n^3x^3}dx=\int_0^1|f_n(x)|dx+\frac{1}{n^3}$，对 $\forall\varepsilon>0$，由1）知 $\exists N_1$ 当 $n>N_1$ 时有 $|f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，令N=max$\left\{N_1,\left[\sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right\}$，则当 $n>N$ 时有

$\left|\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，由此知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=0$

五证明：因 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln2}$，故由柯西积分判别法只级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2n}$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，分别设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2n}=S_1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=S_2$，则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 的部分和 $S_n^2=(\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}\ln k})^2\le\sum\limits_{k=2}^{n}a_k^2\cdot\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln^2k}\le S_1S_2$，于是对一切 $n\ge2$ 有 $S_n\le\sqrt{S_1S_2}$，从而正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛。

六证明：设 $F(x,y)=\tan^3y+\sin(|x|y)$，则在区域 $D:|x|\le\frac{\pi}{4},|y|\le1$ 上 $F(x,y)$ 连续，由于 $\tan^3y$ 严格单调上升，$\sin(|x|y)$ 在D上关于y单调上升，故F（x，y）在D上关于y严格单调上升，且对 $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，有 $F(x,1)>0,F(x,-1)<0$，设 $\bar{x}$ 为 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 内任一点，则由以上讨论知必有 $F(\bar{x},-1)<0,F(\bar{x},1)>0$，于是作为y的一元连续函数，$F(\bar{x},y)$ 在（-1，1）内必有零点，设为 $\bar{y}$，则 $F(\bar{x},\bar{y})=0$。因 $F(x,y)$ 在D上关于y严格单调上升，故 $\bar{y}$ 唯一。由 $\bar{x}$ 的任意性，知 $F(x,y)=0$ 在D上确定了唯一的隐函数，$y=f(x),x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，又因 $F(x,0)=0,(x,0)\in D$，故由隐函数解的唯一性知 $y(x)=0$ 为函数方程 $\tan^3y+\sin(|x|y)=0$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 内的唯一解。

七证明：$u\in C^1(\overline{\Omega})$ 及 u 为非常值函数知 $\iint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy>0$，令 $P=-u\frac{\partial u}{\partial y},Q=u\frac{\partial u}{\partial x}$，则因 $u\in$ $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$，利用格林公式 $\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)\right]dxdy=\oint\limits_{\partial\Omega}\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy$，因 $u\Big|_{\partial\Omega}=0$，$\therefore\oint\limits_{\partial\Omega}\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+u\frac{\partial u}{\partial x}dy=0$，于是 $\iint\limits_\Omega u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)dxdy=-\iint\limits_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$

<0。