

武汉大学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (科学学位)

(满分值 150 分)

科目名称: 高等数学 (理学)

科目代码: 361

注意: 所有答题内容必须写在答题纸上, 凡写在试题或草稿纸上的一律无效。

一、填空题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. (5 分) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$ 。

2. (5 分) 当 $x \rightarrow 2$ 时, 函数 $\frac{x-2}{x^2-4}$ 的极限值为 $(\frac{1}{4})$ 。

二、单项选择题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. (5 分) 可微的周期函数的导数 (A)。

A. 一定是周期函数, 且周期相同

B. 仍是周期函数, 但周期不一定相同

C. 一定不是周期函数

D. 不一定是周期函数

2. (5 分) 若在区间 (a, b) 上函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x) > 0$, 二阶导数 $f''(x) < 0$,

则函数 $f(x)$ 在此区间内是 (B)。

A. 单调减少, 曲线上凸

B. 单调增加, 曲线上凸

C. 单调减少, 曲线上凹

D. 单调增加, 曲线上凹

三、解答题 (共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

1. (10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & \text{当 } x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & \text{当 } x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 其中常数 a 与 b 的

关系如何?

2. (10 分) 在曲线 $y = x^3 + x - 2$ 上, 哪一点的切线平行于直线 $y = 4x - 1$ 。

四、计算题(共 5 小题, 每小题 12 分, 共 60 分)

- (12 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 试求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。
- (12 分) 设 $f'(\ln x) = x + 1$, 试求 $f(x)$, 并求 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ 。
- (12 分) 试求由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e+1) - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积。
- (12 分) 试求由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$, 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分。
- (12 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ 展开成 x 的幂级数, 并确定其收敛区域。

五、证明题(10 分)

设 $x \in (0, 1)$, 试证明 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$ 。

六、应用题(共 2 小题, 每小题 20 分, 共 40 分)

- (20 分) 经过长期观察, 人们发现鲑鱼在河中逆流行进时, 若相对于河水的速度为 v , 鲑鱼游 T 小时所消耗的能量为 $E = cv^3 T$, 其中 c 为常数。假设水流速度为 4km/h , 鲑鱼逆流而上 200 km 时要游多快才能使其消耗的能量最少?
- (20 分) 一容器内有 100L 盐水, 其中含盐 10 kg , 现以 3L/min 均匀速率往容器内注入净水(假设净水与盐立即混合), 又以 2L/min 的均匀速率从容器中抽出盐水, 则 1h 后, 该容器内盐水中的含盐量为多少?