

试卷编号: B

河南师范大学

二〇一一年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码: 801 名称: 高等代数 适用专业或方向: 数学
(必须在答题纸上答题, 在试卷上答题无效, 答题纸可向监考老师索要)

一 (15 分) 证明数域 P 上的不可约多项式没有重根。

二 (15 分) 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 \end{vmatrix}$$

三 (15 分) a, b 取什么值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解? 在有解时, 求一般解。

四 (15) 判定实二次型的正定性。

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2.$$

五 (10 分) 若 A 为 n 级方阵, 秩 $A=1$, A 不可对角化。则 A 是幂零阵。

六 (15 分) 若方阵 A, B 满足: $AB - BA = A$, 则 A 为不可逆阵。

七 (15 分) 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, \mathcal{A} 是 V 上的线性变换, 且 $\mathcal{A}^{n-1} \neq 0$, $\mathcal{A}^n = 0$. 问 \mathcal{A} 是否可以 diagonalize. 为什么?

八 (15 分) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, W 是 V 的子空间, 证明: W 是某个线性变换的核。

九 (20 分) 设 A 为 n 级方阵, 证明: $A^2 = A \Leftrightarrow \text{秩 } A + \text{秩 } (A - E) = n$.

十 (15 分) 设 A 为 n 级实方阵, $A + A' = B$, A' 表示 A 的转置, 其中 B 为正定阵。证明 A 为可逆阵。

以下空白