

试卷编号: B 卷试题

河南师范大学

2012 年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码: 611 名称: 数学分析 适用专业或方向: 数 学
 (必须在答题纸上答题, 在试卷上答题无效, 答题纸可向监考老师索要)

一. (16分, 每小题8分) 求下列极限:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x.$$

二. (16分) 证明 $\frac{\arctan x}{1+x} \leq \ln(1+x)$, 其中 $x \geq 0$.

三. (16分) 设 $0 < a < b$, 证明存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使得 $be^a - ae^b = (1-\eta)e^\eta(b-a)$.

四. (17分) 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$

绝对收敛.

五. (17分) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

六. (17分) 设 C 是包含原点的任意光滑正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$.

七. (17分) 利用求条件极值的方法, 证明对任何正数 a, b, c 有 $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

八. (17分) 求抛物线 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ 所围成图形的面积, 其中 $0 < p < q, 0 < a < b$.

九. (17分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \leq \int_a^x f(t)dt$ 对任意 $x \in [a, b]$ 成立, 证明 $f(x) \leq 0$ 对任意 $x \in [a, b]$ 成立.