河南科技大学

2009 年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 856 **考试科目名称：** 高等代数

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一．（20 分）证明下列命题：

(1). 设 $d(x)$，$f(x)$，$g(x)$ 都是数域 P 上的多项式。如果 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，证明：$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

(2). $f(x)$ 是数域 F 上次数大于零的多项式，$c\in F, c\neq 0$ 则 $f(x-c)\neq f(x)$.

二．（15 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

三．（20 分）证明 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & O & \\ & O & O & & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

四．（15 分）已知 V_1 是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间，V_2 是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$。

五．（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为 $\eta=(1,2,3)$.

六．（20 分）设实二次型 $f(X)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+2tx_2x_3$，求当 t 是何整数时二次型 $f(X)$ 是正定的，并求一个线性替换 $Y=TX$ 将二次型 $f(X)$ 化为标准形。

七．（20 分）设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间。

(1). 设 $V=V_1\oplus V_2$，已知 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 是 V_1 中的线性无关向量组；$\beta_1,\ldots,\beta_s$ 是 V_2 中的线性无关向量组。证明 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$ 是 V 的线性无关向量组。

(2). 设A 是V 的线性变换。证明：A 是单射的充分必要条件是它是满射。

八．（15 分）设数域P 上的 3 维空间V 的线性变换A 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 求线性变换$A^2-5A+A^{-1}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵。

九．（15 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$， 已知线性方程组$AX=\beta$有解但不唯一，试求：(1)$a$的值；(2)正交矩阵$Q$，使$Q^TAQ$为对角矩阵，其中$Q^T$表示$Q$的转置（求$Q$和$Q^TAQ$）。

河南科技大学

2009年攻读硕士学位研究生入学考试试题答案及评分标准

科目代码： 856　　　科目名称： 高等代数

一．（20分）证明下列命题：

(1)．（10 分）设$d(x)$，$f(x)$，$g(x)$都是数域P上的多项式。如果$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的一个组合，证明：$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

(2)．（10 分）$f(x)$是数域F上次数大于零的多项式，$c\in F, c\neq 0$则$f(x-c)\neq f(x)$.

证明：(1). 由题意，存在多项式$u(x), v(x)$，使$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.（4分）如果$h(x)|f(x)$，$h(x)|g(x)$，那么$h(x)|d(x)$.（8分）又由于$d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，所以$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。（10分）

(2). 如果$f(x-c)=f(x)$，那么$f(0)=f(c)=f(2c)=\cdots$.（3分）

考虑$g(x)=f(x)-f(0)$.（6 分） 显然，$\partial g(x)=\partial f(x)$，并且$g(nc)=0, n=1,2,\cdots$.

$g(x)$有无限多个根，这是不可能的。（10分）

二.（15分）已知行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. 求$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$，其中$A_{ij}$是元素$a_{ij}$的代数余子式。

解：考虑行列式$C=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，按它的第二行展开。（5 分）由于$C$和$D$除了第二行外均相同，故$C=A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$，（10分）而计算可得

$$C=\begin{vmatrix}2 & -5 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 7 & 3\\ 4 & 7 & 0 & 3\end{vmatrix}=72.$$ 所以 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=72$.（15 分）

三.（20 分）证明 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab\\ & & & 1 & a+b\end{vmatrix}=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

解：当 $n=1$ 结论显然成立。假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立。（2 分）
对 n 阶行列式，将第一列拆成两项。第二项按第一行展开。第一项的第一列乘 $-b$ 加到第二列，第 2 列乘 $-b$ 加到第 3 列，……，第 n-1 列乘 $-b$ 加到第 n 列。然后用归纳假设。

$$D_n=\begin{vmatrix}a & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab\\ & & & 1 & a+b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & ab & & & \\ 0 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab\\ & & & 1 & a+b\end{vmatrix}$$（10 分）

$$=\begin{vmatrix}a & 0 & & & \\ 1 & a & 0 & & \\ & 1 & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & 1 & a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a+b & ab & & \\ 1 & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab\\ & & 1 & a+b\end{vmatrix}$$（15 分）

$$=a^n+bD_{n-1}=a^n+b\frac{a^n-b^n}{a-b}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$（20 分）

四.（15 分）已知 V_1 是 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的解空间，V_2 是 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，

证明：$P^n=V_1\oplus V_2$。

证：$\forall(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in V$，令 $a=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

我们有 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(a_1-a,a_2-a,\cdots,a_n-a)+(a,a,\cdots,a)$.（5 分）

而且$(a_1-a,a_2-a,\cdots,a_n-a)\in V_1,(a,a,\cdots,a)\in V_2$. 因此$P^n=V_1+V_2$.（7 分）

如果$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in V_1\cap V_2$，那么$b_1+b_2+\cdots+b_n=0$，且$b_1=b_2=\cdots=b_n$.（10 分）

从而$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$.（12 分）

因此$V_1\cap V_2=\{0\}$. 总之，$P^n=V_1\oplus V_2$（15 分）

五.（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为$\eta=(1,2,3)$.

解：考虑以$\eta=(1,2,3)$为解的方程$k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$，

那么$k_1\cdot 1+k_2\cdot 2+k_3\cdot 3=0$.（3 分）

把它看成k_1,k_2,k_3的方程。得到基础解系$(-2,1,0),(-3,0,1)$.（7 分） 由此得到方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-3x_1+x_3=0\end{cases}$$

它以$\eta=(1,2,3)$为基础解系。（10 分）

六.（20 分）设实二次型$f(X)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3+2tx_2x_3$，求当$t$是何整数时二次型$f(X)$是正定的，并求一个线性替换$Y=TX$将二次型$f(X)$化为标准形。

解：此二次型的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&t\\1&t&2\end{pmatrix}$，若要$f$为正定的，则要求其各级顺序主子式都大于零，（5 分）即

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&t\\1&t&2\end{vmatrix}=1-t^2>0,\qquad (t>0)\qquad\qquad (8\text{ 分})$$

因t为整数，故$t=0$（10 分）； 当$t=0$时

$$\begin{aligned}f(X)&=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3\\&=(x_1+x_3)^2+x_2^2+x_3^2\end{aligned},\qquad (12\text{ 分})$$

作线性替换：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}，即 \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$，则其为非退化的线性替换，（16 分）

则经过此线性替换后可得到二次型的标准型：$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$。（20 分）

七.（20 分）设V 是数域P 上的n 维线性空间。

（1）（10 分）设$V = V_1 \oplus V_2$，已知$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是V_1 中的线性无关向量组；$\beta_1, \cdots, \beta_s$ 是V_2 中的线性无关向量组。证明$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 是V 的线性无关向量组。

(2) （10 分）设A 是V 的线性变换。证明：A 是单射的充分必要条件是它是满射。

证明：（1）由于$V = V_1 \oplus V_2$，$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.（2 分） 设

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = 0$$

那么$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r = -b_1\beta_1 - \cdots - b_s\beta_s \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$（4 分）

因此$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r = 0, b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = 0$。（6 分）由已知$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是V_1 中的线性无关向量组；$\beta_1, \cdots, \beta_s$ 是V_2 中的线性无关向量组，得$a_1 = \cdots = a_r = 0, b_1 = \cdots = b_s = 0$.（8 分）

所以$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ 是V 的线性无关向量组。（10 分）

(2) 已知$\dim\ker A + \dim \mathrm{Im} A = n$，（4 分）所以

A 是单射当且仅当$\ker A = \{0\} \Leftrightarrow \dim\ker A = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} A = n \Leftrightarrow \mathrm{Im} A = V$ 当且仅当 A 是满射. 所以 A 是单射的充分必要条件是它是满射。（10 分）

八.（10 分） 设数域P 上的 3 维空间V 的线性变换s 在基a_1, a_2, a_3 下的矩阵为

$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 求线性变换$s^2 - 5s + s^{-1}$在基$a_1, a_2, a_3$ 下的矩阵。

解：线性变换$s^2 - 5s + s^{-1}$在基a_1, a_2, a_3 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}7&-1&1\\6&-1&1\\5&-2&1\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}7&-1&1\\6&-1&1\\5&-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&-1&1\\6&-1&1\\5&-2&1\end{pmatrix}^{-1} \quad （4 分）$$

$$=\begin{pmatrix}48&-8&7\\41&-7&6\\28&-5&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}35&-5&5\\30&-5&5\\25&-10&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\-7&9&-1\end{pmatrix} \quad （8 分）$$

$$=\begin{pmatrix}14&-4&2\\10&0&0\\-4&14&-2\end{pmatrix} \quad （10 分）$$

九.（15 分） 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$， 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，试求：(1) a 的值；(2) 正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵，其中 Q^T 表示 Q 的转置（求 Q 和 Q^TAQ ）。

解：(1) 对线性方程组 $AX=\beta$ 的增广矩阵作初等行变换

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{pmatrix}$$

因为线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，所以秩 $r(A)=r(\overline{A})<3$，故 $a=-2$.

(2) 现在 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ 的特征方程为 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$. 因此特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=0$. 对应的特征向量分别为：

$$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,-2,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.