河南科技大学

2011 年硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 856 **考试科目名称：** 高等代数

（如无特殊注明，所有答案必须写在答题纸上，否则以“0”分计算）

一.（40 分）以下各题只有一个答案是正确的，请选择正确的答案。

1. 设 A,B 是三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵．$|A|=2$，且 $A^2+AB+2E=0$．

则 $|A+B|=($ $)$．

(A) 0 (B) -1 (C) -4 (D) -2．

2. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$．则 $f(x)=0$ 的根的个数为 ( )．

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，四阶行列式 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1|=m$，$|\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3|=n$．

则 $|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ (\beta_1+\beta_2)|=($ $)$．

(A) $m+n$． (B) $-(m+n)$． (C) $n-m$． (D) $m-n$．

4. 四阶对称矩阵的全体，按矩阵的加法和数乘所组成的线性空间 V 的维数是 ( )．

(A) 4 维 (B) 16 维 (C) 8 维 (D) 10 维

5. 设对两向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，

存在两组不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$ 则必有 ( )．

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关.

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\cdots,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\cdots,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关.

6. 设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A,B 的秩为（　　　）.

(A) 必有一个为 0　　(B) 都小于 n.
(C) 如一个等于 n，则另一个小于 n.　　(D) 都等于 n.

7. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则（　　　）.

(A) 当 $m>n$ 时，必有 $|AB|=0$.　　(B) 当 $m>n$ 时，必有 $|AB|\neq 0$.

(C) 当 $n>m$ 时，必有 $|AB|=0$.　　(D) 当 $n>m$ 时，必有 $|AB|\neq 0$.

8. 空间四平面 $a_ix+b_iy+c_iz=d_i(i=1,2,3,4)$ 过同一直线的充要条件是其相应方程组系数矩阵和增广矩阵的秩 $r=$（　　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 已知 $e_1=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}),e_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),e_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 是的一个标准正交基，则向量 $\alpha=(-1,0,2)$ 在此基下的坐标为（　　　）.

(A) $(0,-2,1)$.　　(B) $(-1,0,2)$.　　(C) $(1,0,-2)$.　　(D) $(-2,0,1)$.

10. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵，且 $|A|=-1$，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，

则对 $i,j=1,2,\cdots,n$，均有（　　　）

(A) $a_{ji}=A_{ji}$.　　(B) $a_{ij}=-A_{ji}$.　　(C) $a_{ij}=A_{ij}$.　　(D) $a_{ij}=-A_{ij}$.

二.（20 分）

(1). 证明：如果多项式 $f(x),g(x)$ 不全为零，且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，那么 $(u(x),v(x))=1$.

(2). 命题“如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根，那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”对吗？若你认为这个命题是对的，给出一个证明。若你认为不对，请举出反例。

三.（15 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&3&-1\\1&1&7&2\\1&7&-3&-1\\4&11&5&-1\end{vmatrix}$. 求 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

四.（20 分）计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

五.（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为$\eta=(2,-1,2)$.

六.（15 分）设数域P上的 3 维空间V的线性变换A在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. 求线性变换$A^2+A+2A^{-1}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵。

七.（15 分）设σ是n维欧氏空间V的一个正交变换，证明σ的不变子空间的正交补也是σ的不变子空间。

八.（15 分）设σ是n维欧氏空间V的一个线性变换．如果σ关于一个标准正交基的矩阵是实对称矩阵，那么σ是一个对称变换.

河南科技大学
2011 年硕士研究生入学考试试题答案及评分标准

考试科目代码：856 考试科目名称：高等代数

一.（40 分，每题 4 分）

答：1.(C) 2.(B) 3.(D) 4.(D) 5.(C) 6.(B) 7.(A) 8.(B) 9.(A) 10.(D)

二.（20 分）

(1). 证明：如果 $(f(x),g(x))=1$， $(f(x),h(x))=1$， 那么 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

(2). 命题“如果 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根，那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根”对吗？若你认为这个命题是对的，给出一个证明。若你认为不对，请举出反例。

答：(1). 如果 $f(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 不互素，那么存在不可约多项式 $p(x)$，使 $p(x)| f(x)$ 并且 $p(x)| g(x)h(x)$.（5 分）由后者可知，$p(x)| g(x)$ 或者 $p(x)| h(x)$， 都与 $(f(x),g(x))=1$ 及 $(f(x),h(x))=1$ 矛盾。(10 分)

(2). 命题不对（4 分）。反例：取 $f(x)=x^2-1$， 则 $f'(x)=2x$. 0 是 $f'(x)$ 的 1 重根，但 0 不是 $f(x)$ 的 2 重根。（10 分）

三.（15 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&3&-1\\1&1&7&2\\1&7&-3&-1\\4&11&5&-1\end{vmatrix}$. 求 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

解：考虑行列式 $C=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\1&1&7&2\\1&1&-3&-1\\4&1&5&-1\end{vmatrix}$，按它的第二列展开。（5 分）由于 C 和 D 除了第二列外均相同，故 $C=A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}$，（10 分）而计算可得

$$C=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\1&1&7&2\\1&1&-3&-1\\4&1&5&-1\end{vmatrix}=-54$$. 所以 $A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=-54$.（15 分）

四.（20 分）计算n 阶行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$.

解：各列加到第一列；按第一列展开。

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}1+2+\cdots+n&2&3&\cdots&n-1&n\\0&-1&0&\cdots&0&0\\0&2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$$ ……………………………..(10 分)

$$=(1+2+\cdots+n)\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\2&-2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&n-1&1-n\end{vmatrix}$$ ……..……..………………..(15 分)

$$=(1+2+\cdots+n)(-1)^{n-1}(n-1)!$$ ……..……..……..………………..(18 分)

$$=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!$$ ……..……..……..………………..(20 分)

五.（10 分）写出一个三元齐次线性方程组，使它的基础解系为$\eta=(2,-1,2)$.

解：考虑以$\eta=(2,-1,2)$为解的方程$k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$，

那么$k_1\cdot 2+k_2\cdot(-1)+k_3\cdot 2=0$.（3 分）

把它看成k_1,k_2,k_3的方程。得到基础解系$(1,2,0),(-1,0,1)$. …………...…………（7 分）

由此得到方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\-x_1+x_3=0\end{cases}$$

它以$\eta=(2,-1,2)$为基础解系。…………...…………….……….....……………………..（10 分）

六．（15 分）设数域P上的 3 维空间V的线性变换A在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}$．求线性变换$A^2+A+2A^{-1}$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵。

解：线性变换$s^2 - s - s^{-1}$在基a_1,a_2,a_3下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}^{-1}$$ …………...…………（5 分）

由于 $$\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-4&5\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$ ……....…………（10 分）

所以 $$\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&5&0\\1&4&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&16&8\\7&36&-3\\4&28&1\end{pmatrix}$$ ……（15 分）

七．（15 分）设σ是n维欧氏空间V的一个正交变换，证明σ的不变子空间的正交补也是σ的不变子空间。

证：设W是σ的任意一个不变子空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$为$W$的一组标准正交基，把它扩充成$V$的一组标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$，$\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$，（5 分）则 $W=L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)$，$W^{\perp}=L(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n)$.（8 分） 由于$\sigma$为正交变换，所以$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 也是标准正交基.（10 分）又由于W是σ的不变子空间，所以$\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_m$是$W$的一组标准正交基，从而$\sigma\varepsilon_{m+1},\cdots,\sigma\varepsilon_n\in W^{\perp}$，（12 分）

任取$\alpha=a_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+a_n\varepsilon_n\in W^{\perp}$，那么$\sigma(\alpha)=a_{m+1}\sigma(\varepsilon_{m+1})+\cdots+a_n\sigma(\varepsilon_n)\in W^{\perp}$. 故$W^{\perp}$是$\sigma$的不变子空间.（15 分）

八．（15 分）设σ是n维欧氏空间V的一个线性变换．如果σ关于一个标准正交基的矩阵是实对称矩阵，那么σ是一个对称变换．

证：设σ关于V的一个标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的矩阵$A=(a_{ij})$是对称的．令

$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，$\eta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i$是$V$的任意向量．……………………………………（2 分）

那么$(\sigma(\xi),\eta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma(\alpha_i),\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)$ ……………………………… ……　（4 分）

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\alpha_k\right),\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)$$ ……………………………………………………（6 分）

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i\right)\alpha_k,\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)$$ ……………………………………………………（8 分）

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_iy_j.$$ ……………………………………………………………（10 分）

同样的计算可得

$$(\xi,\sigma(\eta))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$ ……………………………………………（13 分）

因为$a_{ji}=a_{ij}$，所以$(\sigma(\xi),\eta)=(\xi,\sigma(\eta))$。即$\sigma$是一个对称变换。…………（15 分）