青岛大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：816 科目名称：高等代数（共 2 页）

请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效

一、(15 分) 设实数域上的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1）求 A 的特征多项式 $f(x)$；

2） $f(x)$ 是否为实数域上的不可约多项式；

3）求 A 的最小多项式.

二、（15 分）证明：如果 $f(x)\mid f(x^n)$，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

三、（20 分）证明：$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n\geq 2)$，A^* 是 A 的伴随矩阵.

四、（20 分）证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是,它的秩等于 2 且符号差等于 0，或者秩等于 1.

五、（20 分）设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 α，使 $\alpha\notin V_1,\alpha\notin V_2$ 同时成立.

六、（20 分）设三维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\text{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵;

2) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵;

3) 求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

七、（20 分） 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间(作为 R^5 的子空间)的一组标准正交基.

八、（20 分）设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵且有 n 个不同特征值，则凡是满足 $AB = BA$ 的 $n\times n$ 矩阵 B，其特征矩阵的初等因子都是一次的.