

# 青岛大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: 880 科目名称: 数学基础综合 (共 2 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

1. (本题满分 10 分) 求行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

2. (本题满分 20 分) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 满足  $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ , 其中  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵.

(1) 证明:  $r(A - I_n) + r(A - 2I_n) = n$ .

(2) 证明: 齐次线性方程组  $(A - I_n)X = 0$  的解空间  $N(A - I_n)$  与  $A - 2I_n$  的列空间  $R(A - 2I_n)$  相等.

3. (本题满分 10 分) 讨论下列线性方程组解的情况:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}.$$

4. (本题满分 15 分) 设  $A$  为数域  $F$  上的  $n$  阶方阵, 满足  $A^2 = A$ . 令  $F^n$  的子空间

$$W_1 = \{X \in F^n \mid AX = 0\}, \quad W_2 = \{X \in F^n \mid AX = X\}.$$

证明:  $F^n = W_1 \oplus W_2$ , 其中  $\oplus$  表示直和.

5. (本题满分 15 分) 设 3 阶方阵  $A$  的特征值为 1, 2, 3, 令矩阵  $B = 2A^2 - 3A$ .

(1) 求矩阵  $B$  的全部特征值.

(2) 求行列式  $|AB|$  的值.

6. (本题满分 10 分) 计算极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdots \frac{2^{2n}+1}{2^{2n}}.$

7. (本题满分 15 分) 试确定常数  $a, b$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}} du}{ax - \sin x} = 2.$

8. (本题满分 15 分) 证明:  $f(x) = |x|^3$  在  $x=0$  处的三阶导数  $f'''(0)$  不存在.

9. (本题满分 15 分) 设  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上连续, 在  $(1, 2)$  内可导, 且  $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$ . 证明:  $\exists \xi \in (1, 2)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}.$

10. (本题满分 10 分) 设  $n$  为自然数, 试证:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t} \quad (t \leq n).$$

11. (本题满分 15 分) 计算积分  $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$