

青岛大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

科目代码: _____ 880 _____ 科目名称: 数学基础综合(共 2 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

1. (本题满分 10 分) 求行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

2. (本题满分 20 分) 设 A 为 n 阶方阵, 满足 $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, 其中 I_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 证明: $r(A - I_n) + r(A - 2I_n) = n$.

(2) 证明: 齐次线性方程组 $(A - I_n)X = 0$ 的解空间 $N(A - I_n)$ 与 $A - 2I_n$ 的列空间 $R(A - 2I_n)$ 相等.

3. (本题满分 10 分) 讨论下列线性方程组解的情况:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}.$$

4. (本题满分 15 分) 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵, 满足 $A^2 = A$. 令 F^n 的子空间

$$W_1 = \{X \in F^n \mid AX = 0\}, \quad W_2 = \{X \in F^n \mid AX = X\}.$$

证明: $F^n = W_1 \oplus W_2$, 其中 \oplus 表示直和.

5. (本题满分 15 分) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 令矩阵 $B = 2A^2 - 3A$.

(1) 求矩阵 B 的全部特征值.

(2) 求行列式 $|AB|$ 的值.

6. (本题满分 10 分) 计算极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{16} \cdots \frac{2^{2n} + 1}{2^{2n}}$.

7. (本题满分 15 分) 试确定常数 a, b , 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+3u}} du}{ax - \sin x} = 2$.

8. (本题满分 15 分) 证明: $f(x) = |x|^3$ 在 $x=0$ 处的三阶导数 $f'''(0)$ 不存在.

9. (本题满分 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$. 证明: $\exists \xi \in (1, 2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$.

10. (本题满分 10 分) 设 n 为自然数, 试证: $e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t} (t \leq n)$.

11. (本题满分 15 分) 计算积分 $I = \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.