

青岛大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

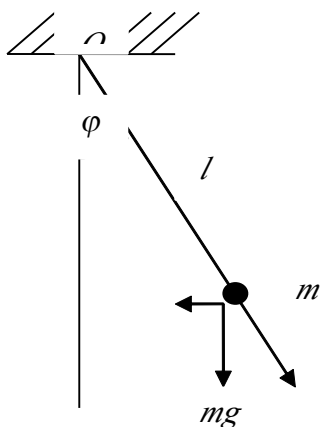
科目代码: 877 科目名称: 常微分方程 (共 3 页)

请考生写明题号, 将答案全部答在答题纸上, 答在试卷上无效

一、 填空题 (20 分, 每小题 4 分)

1. 所谓微分方程就是一个或几个联系着_____之间关系的等式。
2. 在微分方程中, 必定含有未知函数的导数项, 其中出现的_____就称为该微分方程的阶数。
3. 对于 n 阶方程 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 如果它的解 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 含有_____常数 c_1, c_2, \dots, c_n , 则称这个解为其_____。
4. 对于线性微分方程来说, 其通解包含了它的_____; 对于非线性方程来说其通解并不一定包含其_____。
5. 形如 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y'$ 的方程, 称为_____方程。

二、 根据下图建立相应的微分方程 (15 分)



如图所示, 在一根长度为 l 的可略去重量不计且不伸长的线上拴着一个质量为 m 的小球, 让它在过摆动线固定点的铅锤平面上的垂线附近摆动。 φ 表示摆动线与垂线的夹角, 并定义逆时针方向为正向, 反之为负向。试写出小球的摆动方程。

三、 回答下列各题 (25 分)

1. 指出下列微分方程的阶数并判断是否为线性方程

$$(1) \frac{dy}{dx} = \sin x - 4y, \quad (2) \frac{d^3 y}{dx^3} + 6y \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

2. 什么是常微分方程的特解? 何为初值问题?

3. 写出齐次和非齐次线性微分方程组的一般形式; 叙述叠加原理;

若 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是非齐次线性微分方程组的解, 问 $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ 是否仍为该非齐次线性微分方程组的解?

四、 叙述初值问题解的存在唯一性定理 (Picard 定理) (10)

五、 利用变量分离法求解下列方程 (25 分)

$$1. \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \quad 2. \frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

六、 判定下列方程是否是全微分方程, 并求解。 (20 分)

$$1. (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0$$

$$2. \text{利用积分因子法求解方程 } (x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$$

七、 求下述线性方程组的基本解矩阵 (14 分)

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

八、 求下述初值问题的解 (11 分)

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

九、 (10 分) 给定非线性微分方程组 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 。假设 $\mathbf{f}(0) = 0$ 并且向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = 0$ 处连续可微。

1. 何为非线性微分方程组 $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的线性近似方程组?
2. 判定下述非线性方程组的稳定性

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_2 \sin x_1 \end{bmatrix}$$