青岛大学2012年硕士研究生入学考试试题

科目代码：<u>　605　</u>科目名称：<u>　数学分析　</u>（共2页）

<u>请考生写明题号，将答案全部答在答题纸上，答在试卷上无效</u>

一、求下列极限（满分27分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ ．

2．$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$ ．

3．$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{2n^2}\right)$ ．

二、求下列积分（满分33分）

1．求积分 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$．

2．设D是由$x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\ (0<a<b,\ 0<\alpha<\beta)$所围的闭区域，求 $\iint\limits_D dxdy$ ．

3．设S是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，取上侧，计算曲面积分

$$\iint\limits_S yzdydz+zxdzdx+dxdy \ .$$

三、（满分10分）设曲线C的方程为 $x=1-t^2,\ y=t-t^2$，求曲线C上在$t=2$对应的点P处的切线方程。

四、（满分10分）证明 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$内不一致连续。

五、（满分10分）设f在$[a,b]$上连续，且有$f(a),f(b)\in[a,b]$，求证 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$ ．

六、（满分 10 分）设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)=A\in R$，用微分中值定理证明 $f'_-(b)=A$.

七、（满分 10 分）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x\in(0,\pi)$ 条件收敛。

八、（满分 15 分）设 $f_n(x)$, $n=1,2,\cdots,$ 均在点 $x=b$ 连续，数列 $\{f_n(b)\}$ 发散，求证 $\forall\delta>0$，$\{f_n(x)\}$ 在 $(b-\delta,b)$ 内非一致收敛。

九、（满分 10 分）确定幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数。

十、（满分 15 分）设 $f(x)=\int_0^1\dfrac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}dt$ ， $g(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$，证明： $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{4}$ $(x>0)$. （提示：求 f, g 的导数）