

学科、专业名称: 运筹学与控制论(控制论)、系统分析与集成

考试科目名称: 微分方程

- | | |
|----|----------------------------|
| 注意 | 1. 试题共 2 页。 |
| 事项 | 2. 答案必须写在答题纸上, 写明题号, 不用抄题。 |
| | 3. 试题与答题纸一并交上。 |
| | 4. 须用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答, 字迹清楚。 |

一. 解下列微分方程 (共 5 小题, 每小题 15 分)

1. $x y^{(5)} - y^{(4)} = 0$

2. $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0$

3. $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1+y^2})dy = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$

5.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -11x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \end{cases}$$

二. (30分). 设 $\Phi(t)$ 是方程组 $\dot{x} = Ax$ 的基解矩阵, 且 $\Phi(0) = I$ (单位阵).

试证: $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t-t_0)$

三. (20分). 判定系统 $\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2) \end{cases}$

的零解的稳定性.

四. (25分) 判定下列方程组零解的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - z + 3x(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) \\ \dot{y} = -2x - 5y + z + 5y(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) \\ \dot{z} = 2x - y - 2z + 2z(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) \end{cases}$$

其中 $6x^2 + 5y^2 + 2z^2 < 1$